確率・統計 A 演習問題 No.2

1. 容器に 16 のチップが入っており，そのうち 6 つは赤，7 つは白，3 つは青である．容器からチップを無作為に 1 つ選び，選んだチップを容器に返す試行を 4 回繰り返す．このとき，以下の確率を求めよ (このような選び方を復元抽出と呼ぶ).

   (a) 4 つとも赤である．

   (b) 4 つすべて, 赤ではない．

   (c) どの色も一回は選ばれる.

2. 上の問題において，選んだチップを容器に返さなかった場合での，(a) (b) (c) の確率を求めよ (このような選び方を非復元抽出と呼ぶ).

3. 50 個の電球のうち，不良品が 2 つある．今，検査員が無作為に電球を 5 つ同時に選ぶ検査を行う．このとき以下の問いに答えよ．

   (a) 5 個のうち少なくとも 1 つが欠陥品である確率を求めよ．

   (b) 少なくとも 1 つの不良電球を見つける確率が 1/2 を超えるためには最低いくつの電球を検査する必要があるか.

4. Ω を標本空間，A を Ω の部分集合とする．このとき，以下の集合族が Ω 上の σ-集合体になることを示せ.

   (a) $N(\Omega) = \{\emptyset, \Omega\}$.

   (b) $\sigma[A] = \{\emptyset, A, A^c, \Omega\}$.

   (c) $\wp(\Omega)$ ．ただし $\wp(\Omega)$ は Ω の部分集合全体からなる集合族である．

5. $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ とする．以下の Ω の部分集合族が Ω 上の σ-集合体であるか否かを判断せよ．

   (a) $\mathcal{A}_1 = \{\emptyset, \{1\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}, \{3, 4\}, \{4\}, \{1, 2, 3, 4\}\}$.

   (b) $\mathcal{A}_2 = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \{3, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}\}$.

6. $\mathcal{B}$ を Ω 上の σ-集合体とする．このとき $A_1, A_2, \ldots, \in \mathcal{B} \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{B}$ を示せ．

7. $\mathcal{B}$ を Ω 上の σ-集合体とする．このとき $A_1, A_2, \ldots, \in \mathcal{B} \Rightarrow \underline{\lim}_{n\to\infty} A_n \in \mathcal{B}$ を示せ．

8. σ-集合体は集合体であることを示せ.

9. $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ が Ω 上の σ-集合体ならば， $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2$ も Ω 上の σ-集合体になることを示せ.

10. $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ を Ω 上の σ-集合体とする．このとき反例を用いて， $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ は必ずしも Ω 上の σ-集合体にならないことを示せ.

11. $\{\mathcal{B}_j\}_{j \in J}$ を Ω 上の σ-集合体の集まりとする. このとき， $\bigcap_{j \in J} \mathcal{B}_j$ も Ω 上の σ-集合体となることを示せ.

12. S, T を集合とし，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $A_n = \begin{cases} S & n \text{ が奇数} \\ T & n \text{ が偶数} \end{cases}$ とおく. このとき, A_n の上極限集合と下極限集合を求めよ.

13. $A_n = \{(x, y);\ x^2 + y^2 \leq \{1 - (-1)^n/n\}^2\}$ とおく. このとき, 以下に答えよ.

    (a) $\mathcal{B}_n = \bigcup_n A_n, C_n = \bigcap_n A_n$ はどのような集合になるか答えよ.

    (b) A_n の上極限集合と下極限集合を求めよ.