確率・統計 A 演習問題 No.3

1. P を $(\Omega, \mathcal{B})$ 上の確率とする．このとき, $A_i \in \mathcal{B}$ $(i = 1, \ldots, n) \Rightarrow \mathrm{P}(\bigcup_{i=1}^n A_i) \le \sum_{i=1}^n \mathrm{P}(A_i)$ を帰納法により証明せよ．

2. $\mathcal{B}$ を Ω 上の σ-集合体とし, 事象列 $A_i \in \mathcal{B}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ に対し

   $B_1 = A_1$, $B_i = A_1^c \cap \cdots \cap A_{i-1}^c \cap A_i$ $(i = 2, 3, \ldots)$

   とおく．このとき以下を示せ．

   (a) $A_i \supset B_i$,　(b) $\bigcup_{i=1}^n A_i = \bigcup_{i=1}^n B_i$ $(n = 1, 2, \ldots)$,　(c) $\bigcup_{i=1}^\infty A_i = \bigcup_{i=1}^\infty B_i$,　(d) $B_i \cap B_j = \emptyset$ $(i \ne j)$.

3. 以下を示せ．

   (a) 事象列 $\{A_n\}$ が単調増加列 $\Rightarrow \{A_n^c\}$ が単調減少列 ,

   (b) 事象列 $\{A_n\}$ が単調減少列 $\Rightarrow \{A_n^c\}$ が単調増加列.

4. P を $(\Omega, \mathcal{B})$ 上の確率とし, $\{A_n\}$ を $\mathcal{B}$ に属する事象列とする．このとき, $\mathrm{P}(\underline{\lim}_{n\to\infty} A_n) \le \mathrm{P}(\overline{\lim}_{n\to\infty} A_n)$ を示せ．

5. P を $(\Omega, \mathcal{B})$ 上の確率とし, $\{A_n\}$ を $\mathcal{B}$ に属する事象列とする． $\{A_n\}$ が単調減少列ならば $\mathrm{P}(\bigcap_{n=1}^\infty A_n) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(A_n)$ となることを示せ．

6. $(\Omega, \mathcal{B}, \mathrm{P})$ を確率空間, $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{B}$ とする．このとき $\sum_{n=1}^\infty \mathrm{P}(A_n) < \infty \Rightarrow \mathrm{P}(\overline{\lim}_{n\to\infty} A_n) = 0$ を示せ．

7. P を $(\Omega, \mathcal{B})$ 上の確率とする．このとき以下を示せ．

   (a) $\mathrm{P}(A_n) = 0$ $(n = 1, 2, \ldots) \Rightarrow \mathrm{P}(\bigcup_{n=1}^\infty A_n) = 0$,

   (b) $\mathrm{P}(A_n) = 1$ $(n = 1, 2, \ldots) \Rightarrow \mathrm{P}(\bigcap_{n=1}^\infty A_n) = 1$.

8. 標本空間を $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ とし, $\mathcal{B} = \wp(\Omega)$ とする．$A \in \mathcal{B}$ に対し, 集合関数を $\mathrm{P}(A) = \#(A)/6$ で定義する．このとき, P が $(\Omega, \mathcal{B})$ 上の確率となっていることを示せ．

9. P を $(\Omega, \mathcal{B})$ 上の確率とし, $A_1, A_2, A_3 \in \mathcal{B}$ とする このとき

   $\mathrm{P}(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = \mathrm{P}(A_1) + \mathrm{P}(A_2) + \mathrm{P}(A_3) - \mathrm{P}(A_1 \cap A_2) - \mathrm{P}(A_2 \cap A_3) - \mathrm{P}(A_3 \cap A_1) + \mathrm{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$

   となることを計算により示せ．

10. P を $(\Omega, \mathcal{B})$ 上の確率とし, $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{B}$ とする このとき

    $\mathrm{P}(\bigcup_{k=1}^n A_k) = \sum_{k=1}^n \mathrm{P}(A_k) + \sum_{k=2}^n (-1)^{k-1} \sum_{(i_1,\ldots,i_k)} \mathrm{P}(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k})$

    となることを示せ．ただし, $\displaystyle\sum_{(i_1,\ldots,i_k)}$ は $1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n$ を満たす $i_1, \ldots, i_k$ の組みのすべてにわたる和を表わすものとする．(ヒント:帰納法を使う).