確率・統計 A 演習問題 No.4

1. 事象列 $\{A_n\}$ に対して以下を示せ.

   (a) $B_n = \bigcup_{i=1}^n A_i$ $(n = 1, 2, \ldots)$ とするとき, $\lim_{n\to\infty} B_n = \bigcup_{i=1}^\infty A_n$.

   (b) $C_n = \bigcap_{i=1}^n A_i$ $(n = 1, 2, \ldots)$ とするとき, $\lim_{n\to\infty} C_n = \bigcap_{i=1}^\infty A_n$.

2. $(\Omega, \mathcal{B}, \mathrm{P})$ を確率空間とし, $A, B \in \mathcal{B}$ とする. このとき, 確率の定義のみを用いて以下を示せ.

   (つまり, 有限加法性や $\mathrm{P}(\emptyset) = 0$ も証明しなければ使えない.)

   (a) $\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B)$

   (b) $A \subset B$ ならば $\mathrm{P}(A^c \cap B) = \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B)$

3. 以下の集合がボレル集合であることを示せ.

   $(a, b), [a, b], [a, b), (-\infty, b], (-\infty, b), [a, \infty), (a, \infty), \{a\}$

4. $\mu \in \mathbb{R}, 0 < \sigma < \infty$ に対して

$$f(x; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right\}$$

   とし, ボレル集合 A に対して $\mathrm{P}(A) = \int_A f(x; \mu, \sigma^2)dx$ と定義する. このとき, $\mathrm{P}(\mathbb{R}) = 1$ であることを示せ.

   ($\int_A f(x; \mu, \sigma^2)dx$ はルベーグ積分であるが, A が有界な区間のときは定積分 (リーマン積分), A が無限区間のときは広義積分と同じである.)

5. $0 < p < 1$ とする. $\Omega = \{\omega_0, \omega_1, \omega_2, \ldots\}$ とし, $p_k = \mathrm{P}(\{\omega_k\}) = (1-p)p^k$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$,

   $\mathrm{P}(A) = \sum_{\omega_k \in A} p_k$ $(A \in \wp(\Omega))$ とする. このとき $\mathrm{P}(\Omega) = 1$ であることを示せ.

6. $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$, $\mathbb{B}_1$ を 1 次元ボレル集合体, P を $(\mathbb{R}, \mathbb{B}_1)$ 上の確率とする. $\mathbb{R}$ 上の連続関数 $F(x)$ を用いて $\mathrm{P}((a, b]) = F(b) - F(a)$ と表されるとき, $\mathrm{P}(\{a\}) = 0$ であることを示せ.

7. $(\Omega, \mathcal{B}, \mathrm{P})$ を確率空間, $A, B \in \mathcal{B}$ とし, $\mathrm{P}(B) \neq 0$ とする. B を固定し, $A \in \mathcal{B}$ に対して

$$\mathrm{P}_B(A) = \mathrm{P}(A|B)$$

   とおく. このとき, P_B は $(\Omega, \mathcal{B})$ 上の確率であることを示せ

8. $(\Omega, \mathcal{B}, \mathrm{P})$ を確率空間とし, $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{B}$ が $\mathrm{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}) > 0$ を満たしているとき,

$$\mathrm{P}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = \mathrm{P}(A_1)\mathrm{P}(A_2|A_1)\mathrm{P}(A_3|A_1 \cap A_2) \cdots \mathrm{P}(A_n|A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1})$$

   が成り立つことを示せ.

9. $(\Omega, \mathcal{B}, \mathrm{P})$ を確率空間とし, $B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{B}$ は互いに素で, $\bigcup_{i=1}^n B_i = \Omega$ とする. このとき, 任意の $A \in \mathcal{B}$, $\mathrm{P}(A) > 0$ に対して

$$\mathrm{P}(B_i|A) = \frac{\mathrm{P}(B_i)\mathrm{P}(A|B_i)}{\sum_{j=1}^n \mathrm{P}(B_j)\mathrm{P}(A|B_j)}.$$

   が成り立つことを示せ.

10. ある工場では, 機械 I, II, III が同じ長さの同じバネを生産している. 機械 I, II, III はそれぞれ 1%, 4%, 2%の確率で不良品を生産する. 工場全体のバネのうち, 機械 I は 30%, 機械 II は 25%, III は 45%を生産している.

    (a) ある日生産されたバネ全体の中からランダムにバネをとってくるとき, それが不良品である確率を求めよ.

    (b) ランダムに選択されたバネが不良品であったとする. このとき, その不良品が機械 II によって生産されたものであるという条件付き確率を求めよ.