確率・統計 A 演習問題 No.5

1. $A, B \in \mathcal{B}$ $(0 < \mathrm{P}(A) < 1,\ 0 < \mathrm{P}(B) < 1)$ について次を示せ.

   A と B が独立 $\Leftrightarrow$ A^c と B が独立 $\Leftrightarrow$ A と B^c が独立 $\Leftrightarrow$ A^c と B^c が独立

2. 事象 $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{B}$ に対して, $B_i = A_i$ または $B_i = A_i^c$ とする. このとき次を示せ.

   (a) $A_1, \ldots, A_n$ が独立であれば $\mathrm{P}(B_1 \cap \cdots \cap B_n) = \mathrm{P}(B_1) \cdots \mathrm{P}(B_n)$

   (b) すべての $B_1, \ldots, B_n$ の組み合わせに対して, $\mathrm{P}(B_1 \cap \cdots \cap B_n) = \mathrm{P}(B_1) \cdots \mathrm{P}(B_n)$ であれば $A_1, \ldots, A_n$ は独立.

3. 赤玉 3 つと白玉 2 つが入っている袋から 2 回玉を取り出す試行において, 1 回目に白玉が出る事象を A, 2 回目に赤玉が出る事象を B とする. このとき, 以下の問いに答えよ.

   (a) 1 回目の試行の後に取り出された玉を袋に戻したとする. このとき事象 A と B は独立であるか.

   (b) 1 回目の試行の後に取り出された玉を袋に戻さなかったとする. このとき事象 A と B は独立であるか.

4. 10 個の機械が繋がって出来ているシステムの故障確率を考える. A_i を i 番目 $(i = 1, \ldots, 10)$ の機械が故障したという事象とし, それぞれは独立であるとする. $\mathrm{P}(A_i) = p$ $(i = 1, \ldots, 10)$ として以下の問いに答えよ.

   (a) 機械が直列に繋がっているとすると, 10 個の機械のうち 1 つでも壊れたらシステムは故障する. このときシステムの故障確率を求めよ. また, システムの故障確率を 10^{-10} 以下に抑えたいとき, p をどれくらいまで下げる必要があるか. ただし, p が十分小さいとき, $(1-p)^\alpha \approx 1 - \alpha p$ という近似式を用いてもよい.

   (b) 機械が並列に繋がっているとすると, 10 個の機械のうち少なくとも 1 つが故障してなかったらシステムは正常に機能する. このときシステムの故障確率を求めよ. また, システムの故障確率を 10^{-10} 以下に抑えたいとき, p をどれくらいまで下げる必要があるか.

5. a と b を定数とし, X を $(\Omega, \mathcal{B}, \mathrm{P})$ 上の確率変数とする. このとき $aX + b$ も確率変数であることを示せ.

6. X を $(\Omega, \mathcal{B}, \mathrm{P})$ 上の確率変数とする. このとき, X^2 は確率変数となるかどうか調べよ.

7. 標本空間 $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ と Ω 上の σ-集合体 $\mathcal{B} = \{\emptyset, \{2\}, \{3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}\}$ について以下の問いに答えよ.

   (a) $X(k) = k$ $(k = 1, 2, 3, 4)$ とする. X が確率変数になるかどうか調べよ.

   (b) $X(k) = (k - \lambda)^2$ $(k = 1, 2, 3, 4; \lambda \in \mathbb{R})$ とする. X を確率変数にするためには, どのような λ を選べばよいか.

8. 標本空間 $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ に対し, $X(k) = 0$ $(k = 1, 3)$, $X(k) = 1$ $(k = 2, 4)$ となる関数を考える. X が確率変数になるような最小の σ-集合体 $\mathcal{B}$ を求めよ.

9. 標本空間 $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ 上の σ-集合体 $\mathcal{B} = \{\emptyset, \{1\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}\}$ とし, X を Ω 上で定義された実数値関数とする. このとき, X が確率変数になるための条件を求めよ.

10. X を $(\Omega, \mathcal{B}, \mathrm{P})$ 上の確率変数とし, 任意の $A \in \mathbb{B}_1$ に対して $\mathrm{P}_X(A) = \mathrm{P}(X^{-1}(A))$ とする. このとき以下を示せ.

    (a) $A_1, A_2, \ldots \in \mathbb{B}_1$ のとき, $X^{-1}(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} X^{-1}(A_n)$

    (b) P_X は $(\mathbb{R}^1, \mathbb{B}_1)$ 上の確率である.