確率・統計 A 演習問題 No.6

1. 銅貨を 3 回投げて表が出た回数を表わす確率変数を X とする. このとき, X の分布関数を求め, それを図示せよ.

2. 確率変数 X の分布関数を $F(x)$ とする. このとき, 以下の問いに答えよ.

   (a) $\mathrm{P}(X = a) = F(a) - F(a - 0)$ が成り立つことを示せ. ($F(a - 0)$ は左極限値を表わす).

   (b) $F(x)$ が $x = a$ で連続であるとき, $\mathrm{P}(X = a) = 0$ を示せ.

3. 確率変数 X の分布関数が, $F(x) = 0 \ (x < 0),\ x \ (0 \le x < 1),\ 1 \ (1 \le x)$ であるとき, 以下を計算せよ.

   (a) $\mathrm{P}(1/4 < X \le 3/4)$, (b) $\mathrm{P}(X = 1/4)$, (c) $\mathrm{P}(1/4 \le X \le 3/4)$.

4. 確率変数 X の分布関数が, $F(x) = 0 \ (x < -1),\ (x+2)/4 \ (-1 \le x < 1),\ 1 \ (1 \le x)$ であるとき, 以下に答えよ.

   (a) 分布関数 $F(x)$ を図示せよ.

   (b) $\mathrm{P}(-1/2 < X \le 1/2)$, $\mathrm{P}(X = 0)$, $\mathrm{P}(2 < X \le 3)$ を求めよ.

5. 確率変数 X の分布関数を $F(x)$ とし, $F(x)$ は連続な関数とする. このとき定数 $a(\neq 0)$ と b によって定まる確率変数 $Y = aX + b$ の分布関数を F を用いて表わせ.

6. 確率変数 X の分布関数を $F(x)$ とし, $F(x)$ は連続な関数とする. このとき $Y = X^2$ の分布関数を F を用いて表わせ.

7. 確率変数 X の分布関数を $F(x)$ とするとき, 以下を証明せよ.

   (F1) $x_1 < x_2$ ならば $F(x_1) \le F(x_2)$

   (F2) $F(x + 0) = F(x)$

   (F3) $F(-\infty) = 0,\ F(\infty) = 1$

8. $A_1 = \{(x, y);\ x \le 2, y \le 4\}$, $A_2 = \{(x, y);\ x \le 2, y \le 1\}$, $A_3 = \{(x, y);\ x \le 0, y \le 4\}$, $A_4 = \{(x, y);\ x \le 0, y \le 1\}$, $A_5 = \{(x, y);\ 0 < x \le 2, 1 < y \le 4\}$ を $\mathbb{R}^2$ の部分集合とする. 2 つの確率変数 X, Y に関して $\mathrm{P}((X, Y) \in A_1) = 7/8$, $\mathrm{P}((X, Y) \in A_2) = 4/8$, $\mathrm{P}((X, Y) \in A_3) = 3/8$, $\mathrm{P}((X, Y) \in A_4) = 2/8$ のとき, $\mathrm{P}((X, Y) \in A_5)$ を求めよ.

9. 赤玉 3 つと白玉 2 つが入っている壷から 2 回玉を続けて取り出す試行において, 白玉が出る回数を表す確率変数を X, 赤玉が出る回数を表す確率変数を Y とする. このとき, 以下の問いに答えよ.

   (a) X と Y の同時分布関数 $F(x, y) = \mathrm{P}(X \le x, Y \le y)$ を求めよ.

   (b) X と Y の周辺分布関数 $F(x, \infty)$, $F(\infty, y)$ をそれぞれ求めよ.

10. $F(x, y)$ を 2 次元確率変数 (X, Y) の同時分布関数とする. このとき, 以下に答えよ.

    (a) $\Delta_x(a, b)\Delta_y(c, d)F(x, y) = \mathrm{P}(a < X \le b, c < Y \le d)$ を示せ.

    (b) $a < c, b < d$ ならば $F(a, b) \le F(c, d)$ であることを示せ.

    (c) $\lim_{n\to\infty} F(x + 1/n, y + 1/n) = F(x, y)$ を示せ.

    (d) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して δ が存在して $0 < k < \delta,\ 0 < h < \delta$ ならば $|F(x + k, y + h) - \alpha| < \varepsilon$ が成り立つとき, $\alpha = F(x + 0, y + 0)$ と書く. $F(x + 0, y + 0) = F(x, y)$ であることを示せ.

11. 確率変数 X_1, X_2, X_3 の同時分布関数を $F(x_1, x_2, x_3) = \mathrm{P}(X_1 \le x_1, X_2 \le x_2, X_3 \le x_3)$, X_i の周辺分布関数を $F_i(x) = \mathrm{P}(X_i \le x_i)$ $(i = 1, 2, 3)$ とする. このとき, X_1, X_2, X_3 が独立であるための必要十分条件は任意の x_1, x_2, x_3 に対して $F(x_1, x_2, x_3) = F_1(x_1)F_2(x_2)F_3(x_3)$ であることを示せ.