確率・統計 A 演習問題 No.8

1. $\mathbb{R}^2$ 上の区間 $\Omega = (0,1] \times (0,2]$ からランダムに点を選ぶ試行を考える．ここで, ランダムとは, 領域 (ボレル集合) $A \subset \mathbb{R}^2$ から点が選ばれる確率が, $A \cap \Omega$ の面積に比例することを意味する．この試行によって選ばれた点を (X,Y) とするとき, 以下の問いに答えよ．
   (a) (X,Y) の分布関数 $F(x,y)$ を求めよ．
   (b) X, Y それぞれの周辺分布関数 $F_X(x), F_Y(y)$ を求めよ．
   (c) X, Y は独立であることを示せ．

2. 確率関数 $f(x) = p(1-p)^x$ $(p \in (0,1);\ x = 0,1,2,\ldots)$ によって定まる離散型分布を幾何分布と言い, $G(p)$ と表す．このとき以下の問いに答えよ．
   (a) 上記の関数 $f(x)$ が確率関数の性質 $f(x) \geq 0, \sum_{x=0}^{\infty} f(x) = 1$ を満たすことを確かめよ．
   (b) 成功率 p であるベルヌーイ試行において, 成功するまで試行を繰り返したとする．このとき失敗した回数 X とすると, X の確率分布が幾何分布になることを示せ．

3. 幾何分布 $G(p)$ に従う確率変数 X に関して, $\mathrm{P}(X \geq m+n \,|\, X \geq m) = P(X \geq n)$ を示せ．ただし m と n は正の整数とする．また, $\mathrm{P}(X \geq m+n \,|\, X \geq m)$ は, “$X \geq m$” という事象が与えられたときの, “$X \geq m+n$” の起こる条件付き確率を表わす．(このような幾何分布の特性は無記憶性 (以前の失敗回数はこれからの失敗回数と無関係) という.)

4. 確率関数 $f(x) = {}_{x+r-1}C_{r-1} p^r (1-p)^x$ $(p \in (0,1);\ x = 0,1,2,\ldots)$ によって定まる離散型分布を負の 2 項分布と言い, $NB(p)$ と表す．このとき以下の問いに答えよ．
   (a) 上記の関数 $f(x)$ が確率関数の性質 $f(x) \geq 0, \sum_{x=0}^{\infty} f(x) = 1$ を満たすことを確かめよ．
   (b) 成功率 p であるベルヌーイ試行において, r 回成功するまで試行を繰り返したとする．このとき失敗した回数 X とすると, X の確率分布が負の 2 項分布になることを示せ．

5. 負の 2 項分布において, $\lambda = r(1-p)/p$ とおく．λ を一定に保ちながら $r \to \infty, p \to 1$ としたとき, 負の 2 項分布はポアソン分布 $p(\lambda)$ に収束することを示せ．(確率関数が収束することを示す.)

6. 確率関数 $f(x) = \mathrm{P}(X = x) = \frac{{}_M C_x \, {}_{N-M}C_{n-x}}{{}_N C_n}$ (x は非負の整数で, $\max\{0, n-(N-M)\} \leq x \leq \min\{n, M\}$, n, M, N は正の整数で, $M \leq N$) によって定まる離散型分布を超幾何分布と言い, $HG(N,M,n)$ と表す．$N \to \infty$ のとき, $M/N \to \theta$ とすると, 超幾何分布は 2 項分布 $B(n,p)$ に収束することを示せ．(確率関数が収束することを示す.)

7. (X,Y) は 2 次元離散型確率変数で, $\mathrm{P}(X=0, Y=0) = p_{00}$, $\mathrm{P}(X=0, Y=1) = p_{01}$, $\mathrm{P}(X=1, Y=0) = p_{10}$, $\mathrm{P}(X=1, Y=1) = p_{11}$ とおくとき, $p_{ij} > 0$ $(i,j = 0,1)$, $p_{00} + p_{01} + p_{10} + p_{11} = 1$ であるとする．このとき, 以下の問いに答えよ．
   (a) X, Y それぞれの周辺分布の確率関数を求めよ．
   (b) X と Y が独立であるための必要十分条件は $p_{00}p_{11} = p_{01}p_{10}$ であることを示せ．

8. (X,Y) は 2 次元連続型確率変数で, その確率密度関数が $f(x,y) = c$ $(0 < x < 2, 0 < y < 1/2)$, 0 (その他) によって与えられるとする．ただし, c は定数である．こととき, 以下の問いに答えよ．
   (a) c の値を求めよ．
   (b) X, Y それぞれの周辺分布の確率密度関数を求めよ．
   (c) X と Y は独立であることを示せ．

9. 平面 $\mathbb{R}^2$ の三角形領域, $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ 0 < x, 0 < y, x+y < 1\}$ 上からランダムに 1 つの点を選ぶ試行を考える．ここで, ランダムとは, 領域 (ボレル集合) $A \subset \mathbb{R}^2$ から点が選ばれる確率が, $A \cap D$ の面積に比例することを意味する．ランダムに選ばれた点の座標を (X,Y) とおくとき, X と Y は独立であるかどうか調べよ．