# 確率・統計 A 演習問題 No.9

1. 次の確率分布の平均を求めよ.

   (1) ポアッソン分布 $p(\lambda)$　(2) 負の 2 項分布 $NB(n,p)$
   (3) 超幾何分布 $HG(N,M,n)$　(4) 指数分布 $Ex(\lambda)$　(5) ガンマ分布 $Ga(r,\lambda)$

2. $(X,Y)$ は, 3 項分布 $M_3(n,(p_1,p_2))$ に従う離散型確率変数であるとする. このとき, $\mathrm{E}(X-Y)$ を求めよ.

3. $\boldsymbol{X}=(X_1,X_2)'\sim N_2(\boldsymbol{\mu},\Sigma)$ とする. ただし, $\boldsymbol{\mu}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$, $\Sigma=\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}$ である.

   このとき, $Y=X_1-X_2$ の確率密度関数, および, 平均を求めよ. (ヒント: $Z=X_2$ とおいて, $(Y,Z)$ の同時確率密度関数を求める.)

4. $X$, $Y$ は独立な確率変数で, 整数値をとるものとする. $X$, $Y$ の確率関数をそれぞれ $f(x)$, $g(y)$ とおく. このとき, 和 $Z=X+Y$ の確率関数 $h(z)$ は

$$h(z)=\sum_{x=-\infty}^{\infty}f(x)g(z-x)$$

   であることを示せ.

5. $X$, $Y$ を独立な連続型確率変数とする. $X$, $Y$ の確率密度関数をそれぞれ $f(x)$, $g(y)$ とおく. このとき, 和 $Z=X+Y$ の確率密度関数 $h(z)$ は

$$h(z)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)g(z-x)\,dx$$

   であることを示せ.

6. $\mathbb{R}^2$ 上のひし形領域 $\Omega=\{(x,y);\ |x+y|\le 1,\ |x-y|\le 1\}$ からランダムに点を選ぶ試行を考える. ここで, ランダムとは, 領域 (ボレル集合) $A\subset\mathbb{R}^2$ から点が選ばれる確率が, $A\cap\Omega$ の面積に比例することを意味する. この試行によって選ばれた点を $(X,Y)$ とするとき, 以下の問いに答えよ.

   (a) $(X,Y)$ の同時確率密度関数を求めよ.

   (b) $Z=X+Y$, $W=X-Y$ と定義するとき, $(Z,W)$ の同時確率密度関数を求めよ.

   (c) $Z,W$ は独立であることを示せ.

   (d) $\mathrm{E}(Z),\mathrm{E}(W)$ を求めよ.

7. $X$ を確率変数, $A,B$ をボレル集合とするとき, $\mathrm{E}\{1_A(X)\ 1_B(X)\}=\mathrm{P}(X\in A\cap B)$ であることを示せ.

   ただし, 任意の集合 $C$ に対して $1_C(x)=1\ (x\in C),\ 0\ (x\notin C)$, すなわち, $C$ の定義関数である.

8. $X$ は次の確率密度関数で定義される連続型確率変数であるとする.

$$f(x)=\begin{cases}c(1-x^2) & (0\le x\le 1)\\ 0 & (\text{その他})\end{cases}$$

   自然数 $n$ に対して $X_n=n^{-1}[nX]$ と定義する. ここで, 実数 $a$ に対して, $[a]$ はガウス記号, すなわち, $x$ を超えない最大の整数値を表わす. このとき以下の問いに答えよ.

   (a) $c$ の値を求めよ.

   (b) $X_n$ の確率関数を求めよ.

   (c) $\mathrm{E}(X_n)$ を求めよ.

   (d) $\lim_{n\to\infty}\mathrm{E}(X_n)=\mathrm{E}(X)$ であることを示せ.