確率・統計 A

若木宏文

wakaki@math.sci.hiroshima-u.ac.jp
http://home.hiroshima-u.ac.jp/ wakaki/lecture/index.shtml

2014.4.14

講義内容

テキスト

確率・統計の数学的基礎

藤越康祝, 若木宏文, 柳原宏和 著, 広島大学出版会

講義内容 (続き)

目 次

1.1. 不確実性へのアプローチ

不確実性

我々はあらゆる場面で不確実性に直面している.

1. ある時刻からある時刻までに 1mm 以上の雨が降るか.
2. ある銘柄の 1 週間後の株価はどのようになるか。
3. ある病気にはどんな遺伝子が関係しているか.
4. 新たに開発された新薬はこれまでのものに較べて効果があるか.
5. ある作者不詳の作品について，作者を知りたい.
6. ある工場で作製されている製品の不良率はどの程度か.

不確実性の原因

1. 情報の欠如のため
2. 入手可能な情報の不正確さのため.
3. 必要とする情報を取り出す方法がないため.
4. 必要な測定を行うことができないため.
5. 不確実性が本質的に備わっているため.
   $\Rightarrow$ 不確実性を数量化する (統計学).
   不確実性を確率によって表現する.

1.2. 古典的確率

定義と表記

試行: 不確実性を伴う実験や調査.

標本点 (Sample Point): 試行によって起こりうる個々の結果.

標本空間 (Sample Space) Ω: 標本点全体からなる集合.

事象 (Event): Ω の部分集合.

事象 A が起こる: 試行の結果, 事象 A に含まれる標本点のどれかが起こる

$A \cap B$:積事象, $A \cup B$:和事象, A^c:余事象, $\emptyset$:空事象.

例 1.1

サイコロを 1 回振る試行において,

Ω : 標本空間
A :「偶数の目が出る」

という事象は

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}, \quad A = \{2,4,6\}$$

と表せる. この場合 Ω の部分集合は全部で 2^6 個ある.

例 1.2

銅貨を n 回投げる試行において,

Ω : 標本空間および
A :「第 1 回目と第 2 回目に続けて表が出る」

という事象は

$$\Omega = \{(\omega_1, \ldots, \omega_n);\ \omega_i = 0 \text{ または } 1, i = 1, \ldots, n\}$$
$$A = \{(\omega_1, \ldots, \omega_n);\ (\omega_1, \ldots, \omega_n) \in \Omega, \omega_1 = \omega_2 = 1\}$$

で表せる. この場合, 標本点の個数は $N = 2^n$ 個である.
従って, Ω の部分集合は全部で 2^N 個ある.

古典的確率

標本空間 Ω が有限個の点からなる集合で，起こりうる結果がすべて同程度に確からしいと考えられるとき， Ω の部分集合の全体を $\wp(\Omega)$ とし，$\wp(\Omega)$ の各要素 A についてその確率を

$$\mathsf{P}(A)=\frac{A\text{ の要素数}}{\Omega\text{の要素数}}$$

として定める．以下集合 A の要素の数を $\#(A)$ で表す.

例 1.3) 例 1.1 では, $P(A)=\dfrac{1}{6}\#(A)=\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}$

例 1.4) 例 1.2 では $P(A)=\dfrac{1}{2^n}\#(A)=\dfrac{2^{n-2}}{2^n}=\dfrac{1}{4}$

確率の公理

古典的確率 $\mathsf{P}(A)$ は常に以下の性質を満たしている.

(P1) 任意の $A \in \wp(\Omega)$ に対して, $0 \leq \mathsf{P}(A) \leq 1$.

(P2) $\mathsf{P}(\Omega) = 1$.

(P3′) (有限加法性) $A_i \in \wp(\Omega),\ i = 1, \ldots, n$,
$A_i \cap A_j = \emptyset\ (i \neq j)$ ならば

$$\mathsf{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n \mathsf{P}(A_i).$$

1.3 事象族

古典的確率では, Ω が非可算集合のとき, Ω のすべての部分集合に対して確率を定義することは困難である. そのため新たな確率の定義を考える必要がある. そのために必要となるものが本節で取り扱う σ-集合体である.

σ-集合体

定義 1.1

標本空間 Ω の部分集合の集まり $\mathcal{B}$ で次の条件 (B1), (B2), (B3) を満たすものを Ω 上の σ-集合体 (σ-field) または, σ-加法族 という.

(B1) $\Omega \in \mathcal{B}$.

(B2) $A \in \mathcal{B} \Rightarrow A^c \in \mathcal{B}$.

(B3) $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{B} \Rightarrow \displaystyle\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{B}$.

Ω と Ω 上の σ-集合体 $\mathcal{B}$ の組 $(\Omega, \mathcal{B})$ を 可測空間と呼ぶ.

σ-集合体の例

(1) $N(\Omega) = \{\emptyset, \Omega\}$.

(2) $\sigma[A] = \{\emptyset, A, A^c, \Omega\}$: $A \subset \Omega$ を含む最小の σ-集合体

(3) $\wp(\Omega) = \Omega$ の部分集合全体からなる集合族.

集合体

注 1.1

標本空間 Ω の部分集合の集まり $\mathcal{B}$ で次の (B1), (B2), (B3′) （(B3) の条件を緩めたもの）を満たすものを集合体という.

(B1) $\Omega \in \mathcal{B}$.

(B2) $A \in \mathcal{B} \Rightarrow A^c \in \mathcal{B}$.

(B3′) $A_1, A_2 \in \mathcal{B} \Rightarrow A_1 \cup A_2 \in \mathcal{B}$.

σ-集合体の性質 1

(1) σ-集合体は集合体である.

(2) 有限個の要素からなる集合体は σ-集合体である.

(3) $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ が Ω 上の σ-集合体ならば, $\mathcal{B}_1 \bigcap \mathcal{B}_2$ も σ-集合体である.

(4) $\{\mathcal{B}_j\}_{j\in J}$ を Ω 上の σ-集合体の集まりとする. このとき, $\bigcap_{j\in J} \mathcal{B}_j$ も σ-集合体である.

(5) $\mathcal{A}$ を Ω 上の集合族とする. このとき, $\mathcal{A}$ を含む最小な σ-集合体 $\sigma[\mathcal{A}]$ が存在する (定理 1.6 を参照).

(証明は板書で)

上極限集合と下極限集合 (1/2)

集合列 $\{A_n\}$ に対して

$\{A_n\}$ の上極限集合: $\overline{\lim}_{n\to\infty} A_n \overset{\mathrm{def}}{=} \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$
無限個の n について事象 A_n が起こること

$\{A_n\}$ の下極限集合: $\underline{\lim}_{n\to\infty} A_n \overset{\mathrm{def}}{=} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$
ある番号から先すべての n について事象 A_n が起こること

一般に $\underline{\lim}_{n\to\infty} A_n \subset \overline{\lim}_{n\to\infty} A_n$.

特に $\underline{\lim}_{n\to\infty} A_n = \overline{\lim}_{n\to\infty} A_n \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} A_n$ で表す.

上極限集合と下極限集合 (2/2)

上極限集合: 無限個の n について事象 A_n が起こること
下極限集合: ある番号から先すべての n について 事象 A_n が起こること.

例) 銅貨を無限回投げるとき n 回目に表 が出るという事象
$A_n = \{(\omega_1, \omega_2, \ldots) \in \Omega;\ \omega_n = 1\}$

$$\begin{aligned}\overline{\lim}_{n\to\infty} A_n &= \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} \{k \text{ 回目に表が出る }\} \\ &= \bigcap_{n=1}^{\infty} \{n \text{ 回目以降に表が出る }\} \\ &= \{\text{ 無限回表が出る }\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\underline{\lim}_{n\to\infty} A_n &= \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} \{k \text{ 回目に表が出る }\} \\ &= \bigcup_{n=1}^{\infty} \{n \text{ 回目以降に表が出続ける }\} \\ &= \{\text{ ある回数以降表が出続ける }\}\end{aligned}$$

σ-集合体の性質 2

定理 1.1

$\mathcal{B}$ を Ω の σ-集合体とする．このとき

(1) $\emptyset \in \mathcal{B}$.

(2) $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{B} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{n} A_i,\ \bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{B}$.

(3) $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{B} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{B}$.

(4) $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{B} \Rightarrow \varliminf_{n\to\infty} A_n,\ \varlimsup_{n\to\infty} A_n \in \mathcal{B}$.

(証明は板書で)

1. 確率

古典的確率

標本空間 Ω が有限個の点からなる集合で，起こりうる結果がすべて同程度に確からしいと考えられるとき， Ω の部分集合の全体を $\wp(\Omega)$ とし，$\wp(\Omega)$ の各要素 A についてその確率を

$$\mathrm{P}(A) = \frac{A\text{ の要素数}}{\Omega\text{の要素数}}$$

として定める．以下集合 A の要素の数を $\#(A)$ で表す.

問題点

- 標本点が同程度に確からしいとは言えない場合.
- Ω が無限集合の場合 (可算集合, 非可算集合)

確率の公理 (もう 1 回)

古典的確率 $\mathsf{P}(A)$ は常に以下の性質を満たしている.

(P1) 任意の $A \in \wp(\Omega)$ に対して, $0 \leq \mathsf{P}(A) \leq 1$.

(P2) $\mathsf{P}(\Omega) = 1$.

(P3′) (有限加法性) $A_i \in \wp(\Omega),\ i = 1, \dots, n$,
$A_i \cap A_j = \emptyset\ (i \neq j)$ ならば

$$\mathsf{P}(\textstyle\bigcup_{i=1}^n A_i) = \displaystyle\sum_{i=1}^n \mathsf{P}(A_i).$$

確率測度

定義 1.2

$(\Omega, \mathcal{B})$ を可測空間とする. $\mathcal{B}$ 上で定義された集合関数 P で次の条件 (P1), (P2), (P3) を満たすものを $(\Omega, \mathcal{B})$ 上の確率測度 (probability measure), または, 単に確率 (probability) という.

(P1) 任意の $A \in \mathcal{B}$ に対して $0 \leq \mathsf{P}(A) \leq 1$.

(P2) $\mathsf{P}(\Omega) = 1$.

(P3) (完全加法的または可算加法性) $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{B}$ で, $A_i \cap A_j = \emptyset$ $(i \neq j)$ ならば

$$\mathsf{P}(\textstyle\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathsf{P}(A_i).$$

注 1.2

条件 (P3) よりも弱い条件 (P3′) を満たすとき, P を有限加法的確率 (Finite Additive Probability) と呼ぶ.

定義 1.2 を満たす 3 つの組 $(\Omega, \mathcal{B}, \mathrm{P})$ を確率空間 (Probability Space) という.

古典的確率では, Ω のすべての部分集合を事象と呼ぶ.

$$\Updownarrow$$

確率空間では, $\mathcal{B}$ に含まれる Ω の部分集合のみを事象 (Event) と呼ぶ.

確率測度の性質 1

定理 1.2

P を $(\Omega, \mathcal{B})$ 上の確率とする. このとき, 次が成り立つ.

(1) $\mathrm{P}(\emptyset) = 0$.

(2) $A \in \mathcal{B}$ に対し $\mathrm{P}(A^c) = 1 - \mathrm{P}(A)$.

(3) (単調性) $A, B \in \mathcal{B}, A \subset B \Rightarrow \mathrm{P}(A) \leq \mathrm{P}(B)$.

(4) (加法公式) $A, B \in \mathcal{B} \Rightarrow \mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B)$.

(5) (有限加法性) $A_i \in \mathcal{B},\ i = 1, \ldots, n,\ A_i \cap A_j = \emptyset\ (i \neq j)$

$$\Rightarrow \mathrm{P}(\textstyle\bigcup_{i=1}^n A_i) = \displaystyle\sum_{i=1}^n \mathrm{P}(A_i).$$

(6) (有限劣加法性) $A_i \in \mathcal{B},\ i = 1, \ldots, n$

$$\Rightarrow \mathrm{P}(\textstyle\bigcup_{i=1}^n A_i) \leq \displaystyle\sum_{i=1}^n \mathrm{P}(A_i).$$

(証明は板書で)

確率測度の性質 2

定理 1.3

P を $(\Omega, \mathcal{B})$ 上の確率とし, $\{A_n\}$ を $\mathcal{B}$ に属する事象列とする. このとき, 次が成り立つ.

(1) *(劣加法性)* $\mathsf{P}(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}(A_n)$.

(2) $\{A_n\}$ が単調増加列のとき, $\mathsf{P}(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} \mathsf{P}(A_n)$.

(3) $\{A_n\}$ が単調減少列のとき, $\mathsf{P}(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} \mathsf{P}(A_n)$.

(4) *(連続性)* $\overline{\lim}_{n\to\infty} A_n = \underline{\lim}_{n\to\infty} A_n$ のとき

$$\mathsf{P}(\lim_{n\to\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} \mathsf{P}(A_n).$$

(証明は板書で)

ボレル・カンテリの定理

定理 1.4

$(\Omega, \mathcal{B}, \mathsf{P})$ を確率空間, $A_i \in \mathcal{B}$, $i = 1, 2, \ldots$ とする. このとき

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}(A_n) < \infty \Rightarrow \mathsf{P}(\overline{\lim}_{n\to\infty} A_n) = 0.$$

(証明は板書で)