確率・統計 A

若木宏文

wakaki@math.sci.hiroshima-u.ac.jp
http://home.hiroshima-u.ac.jp/ wakaki/lecture/index.shtml

2014.4.21

目 次

1.5. 確率空間の構成

標本点が有限個の場合

Ω が有限集合で $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ とする.
標本点 ω_i が起こる確率を

$$\mathsf{P}(\{\omega_i\}) = p_i,\ i = 1, \ldots, n,$$
$$p_1 + \cdots + p_n = 1$$

として,

$$\mathsf{P}(A) = \sum_{\omega_i \in A} p_i,\ A \in \wp(\Omega)$$

と定めると, P は $\Omega, \wp(\Omega)$ 上の有限加法的確率であることがわかる.
Ω が有限集合なので, 可算加法性も満たす.

標本空間が可算集合の場合

定理 1.5

Ω が可算集合で $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$ とする.
実数列 $\{p_1, p_2, \ldots\}$ で

$$p_i \geq 0 \ (i = 1, 2, \ldots), \quad \sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$$

なるものをとり, $\mathsf{P}(\{\omega_i\}) = p_i \ (i = 1, 2, \ldots)$ とする. さらに

$$\mathsf{P}(A) = \sum_{\omega_i \in A} p_i, \ A \in \wp(\Omega)$$

と定めると, P は $\Omega, \wp(\Omega)$ 上の確率測度となる. すなわち, (P1), (P2), (P3) を満たす.

(証明は板書で)

標本空間が非可算集合の場合

標本空間 Ω が実数全体，あるいは, 銅貨を無限回なげるような非可算集合の場合, すべての集合に確率の公理を満たすように確率 P を定義するのが困難.

確率空間の構成手順

1. 基本的な事象の集まり M を定める.
   M の要素である Ω の部分集合に対して確率 (の元) を定義.
2. M を含む最小な σ-集合体 $\sigma[M]$ をとる. (定理 1.6)
3. M 上で定義された確率を $\sigma[M]$ 上に拡張する.(測度の拡張定理)

定理 1.6

M を Ω の任意の部分集合族とする．このとき M を含む最小の σ-集合体が一意的に存在する．これを $\sigma[M]$ と書き，M から生成される Ω 上の σ-集合体という．

[証明]

$\mathcal{M}$ を M を含む Ω 上の σ-集合体 $\mathcal{B}$ の全体とし，

$$\mathcal{B}_0 = \bigcap_{\mathcal{B} \in \mathcal{M}} \mathcal{B}$$

と定義すると，$M \subset \mathcal{B}_0$, $\mathcal{B}_0 \in \mathcal{B}$, および $\forall \mathcal{B} \in \mathcal{M}, (\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{B})$ が成り立つ．

ボレル集合

$\Omega = \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$
$J_1 = \{(a, b];\ -\infty < a < b < \infty\}$
のとき $\sigma[J_1] = \mathbb{B}_1$ と書き, 1 次元ボレル集合体という.
ボレル集合体 $\mathbb{B}_1$ に属する集合をボレル集合という.

$(a, b), [a, b], [a, b), (-\infty, b], (-\infty, b), [a, \infty), (a, \infty), \{a\}$ および, すべての開集合, 閉集合はボレル集合である.

例.

$$(a, b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (a, b - n^{-1}] \in \mathbb{B}_1, \qquad [a, b] = \bigcap_{n=1}^{\infty} (a - n^{-1}, b] \in \mathbb{B}_1$$

確率と積分

$(\mathbb{R}, \mathbb{B}_1)$ 上の確率 P を, 次の (1), (2) をみたす関数 $f(x)$ の積分として定義することができる.

(1) すべての x に対して $f(x) \geq 0$

(2) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

すなわち, 任意の a, b $(a < b)$ に対して

$$\mathrm{P}((a,b]) = \int_a^b f(x)dx$$

と定義する.

(ボレル集合 A に対して, $\mathrm{P}(A) = \int_A f(x)dx$ (ルベーグ積分) と一致)

正規分布

例 1.11 (1 次元正規分布 (ガウス測度))
$\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$ とするとき, 任意の a, b $(a < b)$ に対して

$$\mathsf{P}((a,b]) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] dx$$

となるような確率を, 平均 μ, 分散 σ^2 の正規分布 (ガウス測度) という

m 次元ボレル集合体 (1/2)

$\Omega = \mathbb{R}^m$
$J_m = \{(a_1, b_1] \times \cdots \times (a_m, b_m];\ -\infty < a_k < b_k < \infty\ k = 1, \ldots, m\}$
のとき, $\sigma[J_m] = \mathbb{B}_m$ と書き, m 次元ボレル集合体という.

2 つの可測空間 $(\Omega_1, \mathcal{B}_1), (\Omega_2, \mathcal{B}_2)$ が与えられたとき,
$\sigma[\{A \times B;\ A \in \mathcal{B}_1, B \in \mathcal{B}_2\}] = \mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2$ と書き, $\mathcal{B}_1$ と $\mathcal{B}_2$ の直積 σ-集合体という.
また, $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2)$ を $(\Omega_1, \mathcal{B}_1), (\Omega_2, \mathcal{B}_2)$ の直積可測空間という.

m 次元ボレル集合体 (2/2)

同様に
m 個の可測空間 $(\Omega_i, \mathcal{B}_i), (i = 1, \ldots, m)$ が与えられたとき,
$\sigma[\{A_1 \times \cdots \times A_m;\ A_i \in \mathcal{B}_i, i = 1, \ldots, m\}] = \mathcal{B}_1 \times \cdots \times \mathcal{B}_m$ と書き,
$\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_2$ の直積 σ-集合体という.
また, $(\Omega_1 \times \cdots \times \Omega_m, \mathcal{B}_1 \times \cdots \mathcal{B}_m)$ を $(\Omega_1, \mathcal{B}_1), \ldots, (\Omega_m, \mathcal{B}_m)$ の直積可測空間という.

m-次元ボレル集合体は, m 個の 1 次元ボレル集合体の直積, すなわち,

$$\mathbb{B}_m = \mathbb{B}_1 \times \cdots \times \mathbb{B}_1 \ (m\ \text{個})$$

である.

1.6. 条件付き確率

ある確率現象のモデル化として, 確率空間 $(\Omega, \mathcal{B}, \mathrm{P})$ が導入されているとする. この確率空間において, ある事象 B が起きたという情報が与えられたとき, 可測空間 $(\Omega, \mathcal{B})$ に対してどのような確率測度を考えればよいであろうか

例 1.12

(問) 1 組 52 枚のカードから 1 枚のカードを抜き出す試行を考える. 抜き出されたカードがスペードであるという情報が与えられたとき, どのような確率を考えればよいか.

(答) 標本空間は $\Omega = \{s_1, \dots, s_{13}, t_1, \dots, t_{39}\}$ とし, 抜き出されたカードがスペードであるという事象を $B = \{s_1, \dots, s_{13}\}$ とする. このとき, 各標本点の確率を

$$\mathsf{P}(\{s_i\} \mid B) = \mathsf{P}_B(\{s_i\}) = \frac{1}{13},$$
$$\mathsf{P}(\{t_i\} \mid B) = \mathsf{P}_B(\{s_i\}) = 0,$$

とすればよい.

条件付き確率の定義

定義 1.3
$(\Omega, \mathcal{B}, \mathsf{P})$ を確率空間, $A, B \in \mathcal{B}$ とし, $\mathsf{P}(B) \neq 0$ とする. このとき

$$\mathsf{P}(A|B) = \frac{\mathsf{P}(A \cap B)}{\mathsf{P}(B)}$$

を事象 B が与えられたときの事象 A の条件付き確率 (Condistional Probability) という.

定理 1.7

$(\Omega, \mathcal{B}, \mathsf{P})$ を確率空間, $A, B \in \mathcal{B}$ とし, $\mathsf{P}(B) \neq 0$ とする. B を固定し, $A \in \mathcal{B}$ に対して

$$\mathsf{P}_B(A) = \mathsf{P}(A|B)$$

とおく. このとき, P_B は $(\Omega, \mathcal{B})$ 上の確率である.

(証明は演習問題)

$$0 \leq \mathsf{P}_B(A) \leq 1, \quad \mathsf{P}_B(\Omega) = 1,$$
$$\mathsf{P}_B(\textstyle\bigcup_{i=1}^{\infty}) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathsf{P}_B(A_i) \ (A_i \cap A_j = \emptyset \ (i \neq j))$$

を示す.

乗法公式

定義 1.3 より

$$\begin{aligned} \mathsf{P}(A_1 \cap A_2) &= \mathsf{P}(A_1)\mathsf{P}(A_2|A_1), \\ \mathsf{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) &= \mathsf{P}(A_1 \cap A_2)\mathsf{P}(A_3|A_1 \cap A_2) \\ &= \mathsf{P}(A_1)\mathsf{P}(A_2|A_1)\mathsf{P}(A_3|A_1 \cap A_2) \end{aligned}$$

が成立する.

$$\begin{aligned} &\mathsf{P}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) \\ &= \mathsf{P}(A_1)\mathsf{P}(A_2|A_1)\mathsf{P}(A_3|A_1 \cap A_2) \\ &\quad \times \mathsf{P}(A_4|A_1 \cap A_2 \cap A_3) \cdots \mathsf{P}(A_n|A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}). \end{aligned}$$

ただし, $\mathsf{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}) > 0$ とする.

Bayes の公式

定理 1.8 (ベイズの公式)

事象列 $\{B_i\}$ は互いに素で, $B_i \in \mathcal{B}, \mathsf{P}(B_i) > 0$, $i = 1, 2, \ldots$, かつ

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = \Omega$$

とする. このとき, 任意の $A \in \mathcal{B}$, $\mathsf{P}(A) > 0$ に対して

$$\mathsf{P}(B_i|A) = \frac{\mathsf{P}(B_i)\mathsf{P}(A|B_i)}{\sum_{j=1}^{\infty} \mathsf{P}(B_j)\mathsf{P}(A|B_j)}.$$

(証明は板書で)

Bayes の公式の解釈

試行の結果，$B_1, B_2, \ldots,$ のいずれかが起こり，その影響で事象 A が起こったとする.

- 事前：事象 A が起こる前のこと.
- 事後: 事象 A が起こった後のこと.
- $\mathrm{P}(B_i)$:事前確率 (事象 B_i に対して $\mathrm{P}(B_i)$ は事象 A が起こる前に与えられている確率であるから).
- $\mathrm{P}(B|A_i)$:事後確率 (事象 A が起こった後で与えられる確率であるから).

Bayes の公式は, 事後確率は事前確率を用いて表されることを示している

例 1.13

各々2 つの引き出しがついた箱が 3 つある.

- 箱 1 の引出しには両方とも金のコインが入っている.
- 箱 2 には, 一方の引き出しに金のコイン・他方の引き出しに銀のコインが入っている.
- 箱 3 の引き出しには両方とも銀のコインが入っている.

箱をランダムに選び, 引出しをあけたところ金のコインが入っていた. この箱の他方の引き出しに金のコインが入っている確率を求めよ.

(解答は板書で)