確率・統計 A

若木宏文

wakaki@math.sci.hiroshima-u.ac.jp
http://home.hiroshima-u.ac.jp/ wakaki/lecture/index.shtml

2014.5.19

目 次

2.4. 確率変数の独立性

確率変数の独立性

(復習) 2 つの事象 A, B について

$$\mathsf{P}(A \cap B) = \mathsf{P}(A)\mathsf{P}(B)$$

が成り立つとき, A と B は互いに独立であるという.

定義 2.3

$X_1, \ldots, X_n$ を $(\Omega, \mathcal{B}, \mathsf{P})$ 上の確率変数とする. 任意の区間
$I_1 = (a_1, b_1]$, ... , $I_n = (a_n, b_n]$ に対して, n 個の事象

$$\{\omega;\ X_1(\omega) \in I_1\}, \ldots, \{\omega;\ X_n(\omega) \in I_n\}$$

が互いに独立であるとき, $X_1, \ldots, X_n$ は互いに独立であるという.
ただし, $-\infty \leq a_k < b_k < \infty$ $(k = 1, \ldots, n)$

注 2.8

任意の区間 $I_1 = (a_1, b_1], \ldots, I_n = (a_n, b_n]$ に対して, n 個の事象 $\{\omega;\ X_1(\omega) \in I_1\}, \ldots, \{\omega;\ X_n(\omega) \in I_n\}$ が互いに独立であれば, 任意のボレル集合 $B_1, \ldots, B_n$ に対して, n 個の事象 $\{\omega;\ X_1(\omega) \in B_1\}, \ldots, \{\omega;\ X_n(\omega) \in B_n\}$ が互いに独立であることが, 確率測度の拡張定理を用いて示せる. この逆は明らかである. このことから, 区間の代わりにボレル集合を用いて確率変数の独立性を定義してもよい.

定理 2.7

$X_1, \ldots, X_n$ の同時分布関数を $F_{X_1,\ldots,X_n}(x_1, \ldots, x_n)$, X_i の周辺分布関数を $F_{X_i}(x_i)$ とする．このとき, $X_1, \ldots, X_n$ が互いに独立であるための必要十分条件は

$$F_{X_1,\ldots,X_n}(x_1, \ldots, x_n) = F_{X_1}(x_1) \cdots F_{X_n}(x_n), \quad {}^{\forall}x_i \in \mathbb{R},\ i = 1, \ldots, n$$

が成立することである．

(証明は板書で)

2 つの確率ベクトルの独立性

$\mathbb{R}^n$ における任意の半開区間 $A = (a_{11}, a_{21}] \times \cdots \times (a_{1n}, a_{2n}]$ と
$\mathbb{R}^m$ における任意の半開区間 $B = (b_{11}, b_{21}] \times \cdots \times (b_{1m}, b_{2m}]$ に対して

$$\mathsf{P}(\boldsymbol{X} \in A, \boldsymbol{Y} \in B) = \mathsf{P}(\boldsymbol{X} \in A)\mathsf{P}(\boldsymbol{Y} \in B)$$

を満たすとき $\boldsymbol{X}$ と $\boldsymbol{Y}$ は独立であるという.

2.5. 離散型・連続型分布
2.5.1. 離散型・連続型分布

離散型分布と確率関数

確率変数 X のとりうる値が, 有限個または可算無限個の値をとるとき, 離散型 (discrete type) 確率変数であるといい, その分布を離散型分布という.

離散型分布は

$$f(x) = \mathsf{P}(X = x) = \mathsf{P}(\{\omega;\ X(\omega) = x\}), \quad x \in \mathbb{R}$$

によって決定される. $f(x)$ を確率関数 (probability function) あるいは連続型の場合と同様に確率密度関数 (probability density function), pdf という.

確率関数の性質

X のとりうる値の集合を $D = \{x_j;\ j = 1, 2, \ldots\}$ とすると

(1) $f(x_j) \geq 0,\ j = 1, 2, \ldots.$

(2) $\sum_{j=1}^{\infty} f(x_j) = 1.$

離散型確率変数の場合には，とりうる値の集合 D 上における確率が問題になる．確率関数は多くの場合 D 上に制限して

$$f(x) = \mathsf{P}(X = x) = \mathsf{P}(\{\omega;\ X(\omega) = x\}),\ x \in D$$

と表される．
分布関数は

$$F(x) = \sum_{x_j \leq x} f(x_j)$$

と表せる．

離散型分布の例

2 項分布 (Binomial distribution)
確率関数が

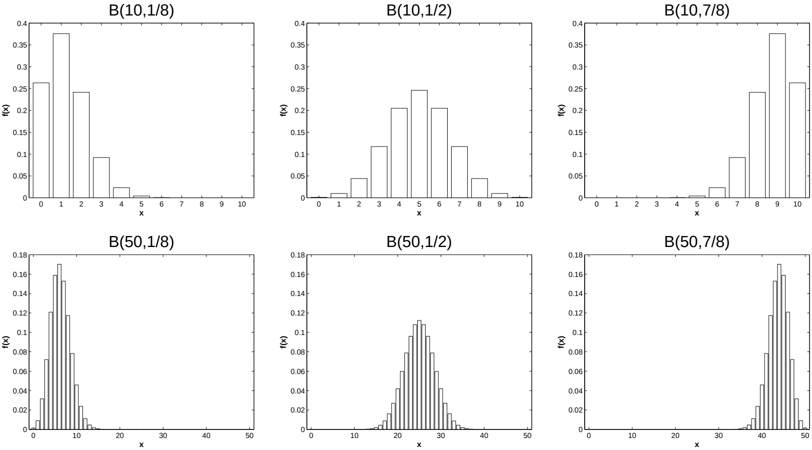
$$f(x) = \mathsf{P}(X = x) = {}_nC_x \theta^x (1-\theta)^{n-x}, \quad x = 0, 1, \ldots, n$$

で与えられる分布をパラメータ n, $\theta \in [0, 1]$ の 2 項分布といい, $B(n, \theta)$ で表す.

$D = \{0, 1, \ldots, n\}$ とおくと

$$\mathsf{P}(X \in D) = \sum_{x=0}^{n} \mathsf{P}(X = x) = \{\theta + (1-\theta)\}^n = 1 \text{ (2 項定理)}$$

2 項分布の確率関数



ポアソン分布 (Poisson distribution)
確率関数が

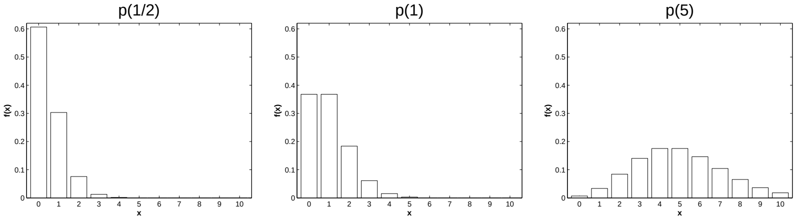
$$f(x) = \mathsf{P}(X = x) = \frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda}, \quad x = 0, 1, \ldots$$

で与えられる分布をパラメータ $\lambda > 0$ のポアソン分布といい, $p(\lambda)$ で表す.

$D = \{0, 1, \ldots\}$ とおくと

$$\mathsf{P}(X \in D) = \sum_{x=0}^{\infty} \mathsf{P}(X = x) = e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = 1.$$

ポアソン分布の確率関数



ベルヌーイ試行 (1/2)

成功率 p, 反復回数 n のベルヌーイ試行 (Bernoulli trial) とは, 次の条件 (1), (2), (3) をみたす n 回の繰り返し試行のことである.

(1) 各回の試行の結果は, A か A^c のどちらか一方しか起きない.

(2) 各回の試行の結果は, 他の試行の結果と互いに独立である.

(3) 事象 A が起こる確率 $(= p)$ は毎回不変である.

事象 A を成功, 事象 A^c を失敗ともいう. また, このような試行の繰り返し試行を, ベルヌーイ試行列という.

ベルヌーイ試行 (2/2)

ある特定の事象 A の生起に着目する試行を繰り返す試行において,
第 i 回目の試行結果を表す確率変数 X_i を,

A が起これば 1 をとり, A^c が起これば 0 をとるものとして定義する.

このとき, 成功率 p, 反復回数 n のベルヌーイ試行は, 次の (1), (2) をみたす確率変数列 $X_1, \ldots, X_n$ とみなすことができる.

(1) $\mathsf{P}(X_i = 1) = p,\ \mathsf{P}(X_i = 0) = 1 - p,\ i = 1, \ldots, n$.

(2) 確率変数列 $X_1, \ldots, X_n$ は互いに独立である.

このような確率変数列を
成功率 p, 反復回数 n のベルヌーイ確率変数列という.

定理 2.8

確率変数列 $X_1, \ldots, X_n$ を成功率 p, 反復回数 n のベルヌーイ確率変数列とし, 成功の回数

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n$$

を考える. このとき, 次が成り立つ.

(1) 確率変数 S_n は 2 項分布 $B(n, p)$ に従う.

(2) 確率変数 S_n は 2 項分布 $B(n, p_n)$, $p_n = \lambda/n$ に従うとする. このとき

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}(S_n = k) = p(k;\lambda), \ \ k = 0, 1, \ldots$$

ここで, $p(k;\lambda)$ はパラメータ λ のポアソン分布の確率関数である.

(証明は板書で)

その他の離散型分布

幾何分布 (Geometric distribution)

$$f(x) = \mathsf{P}(X = x) = p(1-p)^x, \;\; x = 0, 1, 2, \ldots$$

パラメータ p $(\in (0,1))$ の幾何分布といい, $G(p)$ と表す.

負の 2 項分布 (Negative binomial distribution)

$$f(x) = \mathsf{P}(X = x) = {}_{x+r-1}C_{r-1} p^r (1-p)^x, \;\; x = 0, 1, 2, \ldots$$

パラメータ r, p $(\in (0,1))$ の負の 2 項分布といい, *NB*(r,p) と表す.

超幾何分布 (Hypergeometric distribution)

$$f(x) = \mathsf{P}(X = x) = \frac{{}_MC_x \, {}_{N-M}C_{n-x}}{{}_NC_n}$$

x は非負の整数で, $\max\{0, n-(N-M)\} \leq x \leq \min\{n, M\}$.

パラメータ N, M, n の超幾何分布といい, *HG*(N, M, n) と表す.

連続型分布と確率密度関数

身長, 温度, バスの待ち時間などのように X の取り得る値が連続する値となる場合で, とくに X の分布関数が

$$\mathsf{P}(X \leq x) = F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt, \ x \in \mathbb{R}$$

と表されるとき, 連続型確率変数 (Continuous type random variable) といい, その確率分布を連続型分布という.
$\mathbb{R}$ 上の関数 $f(x)$ を確率密度関数 (Probability density function, pdf) という.

注. 分布関数 $F(x)$ が連続であるが, 連続型でない分布もある.

確率密度関数の性質

$$\mathsf{P}(a < X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$$

$f(x)$ の連続点で

$$\frac{d}{dx}F(x) = f(x)$$

(1) $f(x) \geq 0, \quad {}^\forall x \in \mathbb{R}.$

(2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = 1.$

連続型分布の例

一様分布 (Uniform distribution)
確率密度関数が

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & a < x \le b \\ 0, & \text{その他} \end{cases}$$

で与えられる分布を区間 $(a, b]$ 上の一様分布といい, $U(a, b]$ で表す.

定理 2.9

連続型確率変数 X の分布関数 F は, $a < x < b$ において, 狭義単調増加で $F(a) = 0, F(b) = 1$ であるとする ($a = -\infty$ あるいは $b = \infty$ でもよい). このとき, 確率変数 $Y = F(X)$ は一様分布 $(0, 1]$ に従う. 逆に, Y が一様分布 $(0, 1]$ に従うとする. このとき, $X = F^{-1}(Y)$ の分布関数は F となる.

(証明は板書で)

正規分布 (Normal distribution)
確率密度関数が

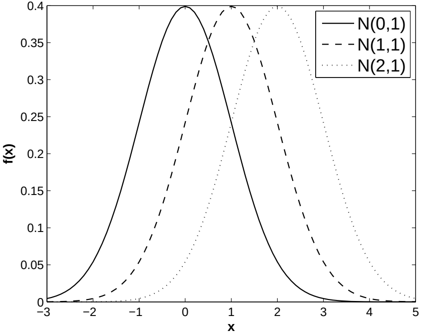
$$f(x;\ \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right\}$$

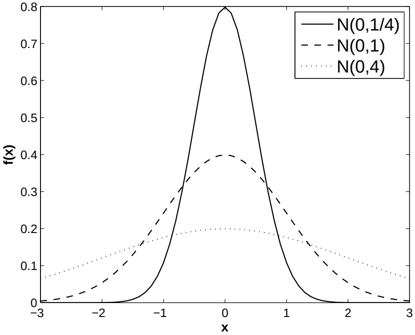
で与えられる分布を平均 μ, 分散 σ^2 の正規分布といい, $N(\mu, \sigma^2)$ で表す. ここで, $-\infty < \mu < \infty, \sigma^2 > 0$.

$N(0,1)$ を標準正規分布 (Standard normal distribution) という. $N(0,1)$ の pdf は

$$\phi(x) = f(x;\ 0, 1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)$$

正規分布の確率密度関数





その他の連続型分布

指数分布 (Exponential distribution)
確率密度関数が

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

で与えられる分布を**指数分布**といい, $Ex(\lambda)$ で表す. ここで, λ は正の実数である.

ガンマ分布 (Gamma distribution)
確率密度関数が

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(r)} \lambda^r e^{-\lambda x} x^{r-1}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

で与えられる分布を**ガンマ分布**といい, $Ga(r, \lambda)$ で表す. ここで, r, λ は正の実数である.