確率・統計 A

若木宏文

wakaki@math.sci.hiroshima-u.ac.jp
http://home.hiroshima-u.ac.jp/ wakaki/lecture/index.shtml

2014.5.26

目 次

2.5. 離散型・連続型分布
2.5.2. 2次元の場合

2次元離散型分布と連続型分布

2次元確率変数 (X, Y) の取り得る値の集合 D が, $\mathbb{R}^2$ の高々可算集合であるとき, (X, Y) は 離散型確率変数, また, (X, Y) の分布を離散型分布という.

離散型分布は, 確率関数

$$f(x, y) = \mathsf{P}(X = x, Y = y), \ \ (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

によって決定される.

2次元確率変数 (X, Y) 分布関数が

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(s, t) ds dt$$

と表されるとき,(X, Y) は 連続型確率変数, また, (X, Y) の分布を連続型分布という.
$f(x, y)$ を (X, Y) または, (X, Y) の分布の確率密度関数という.

2 次元確率関数と確率密度関数の性質

- 確率関数 (離散型)
  X の取り得る値を $x_1, x_2, \dots,$
  Y の取り得る値を $y_1, y_2, \dots$ とすると

  (1) $f(x_i, y_j) \geq 0,\ \ i, j = 1, 2, \dots$ (2) $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} f(x_i, y_j) = 1$

  同時分布関数：$F(x, y) = \displaystyle\sum_{x_i \leq x}\sum_{y_j \leq y} f(x_i, y_j)$

- 確率密度関数 (連続型)
  (1) $f(x, y) \geq 0,\ {}^{\forall}(x, y) \in \mathbb{R}^2$ (2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dxdy = 1$

  同時分布関数：$F(x, y) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(s, t)dsdt$

  $\left(\dfrac{\partial^2}{\partial x \partial y} F(x, y) = f(x, y)\right)$

3 項分布

1 回の試行で事象 A, B, C のいずれかが起こりうる.
A が起こる確率を p_1, B が起こる確率を p_2 とする.
事象 C が起こる確率は, $1 - p_1 - p_2$ である.

n 回の独立な試行で, A が起こる回数を X, B が起こる回数を Y とすれば

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \mathsf{P}(X = x, Y = y) \\ &= \frac{n!}{x!y!(n-x-y)!} p_1^x p_2^y (1 - p_1 - p_2)^{n-x-y} \\ &\quad ((x, y) \in D;\ 0 \leq p_1,\ 0 \leq p_2,\ p_1 + p_2 \leq 1) \end{aligned}$$

ただし, $D = \{(x, y);\ x, y$ は非負整数$, x + y \leq n\}$.
このような分布を, パラメータ $n, (p_1, p_2)$ をもつ 3 項分布といい,
$M_3(n, (p_1, p_2))$ と表す.

2 次元正規分布

(X, Y) の確率密度関数が

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left\{\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right) + \left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right\}\right]$$

$$\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R},\ \sigma_1^2 > 0, \sigma_2^2 > 0,\ -1 < \rho < 1$$

で表されるとき, 2 次元正規分布という.

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}, \quad \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$$

とおくと

$$f(x,y) = (2\pi)^{-1}|\Sigma|^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})'\Sigma^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})\right\}$$

と表せるので, (X, Y) の分布を $N_2(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$ と表す.

周辺分布

- (X, Y) が離散型で，その確率関数を $f(x_i, y_j)$，$i, j = 1, 2, \ldots$ とすると，X は離散型で，その確率関数は
$$f_X(x_i) = \mathrm{P}(X = x_i, Y \in D_y) = \sum_{y_j \in D_y} f(x_i, y_j), \quad D_y = \{y_1, y_2, \ldots\}$$
- (X, Y) が連続型で，その分布関数を $F(x, y)$，確率密度関数を $f(x, y)$ とすると，X は連続型で，その確率密度関数は
$$F(x, \infty) = \int_{-\infty}^{x} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(s, t)dt \right\} ds \text{ より } f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, t)dt$$

定理 2.10

(1) (X, Y) が 3 項分布 $M_3(n, (p_1, p_2))$ に従うとする．このとき，X, Y はそれぞれ 2 項分布 $B(n, p_1)$, $B(n, p_2)$ に従う．

(2) (X, Y) が 2 次元正規分布 $N_2(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$ に従うとする．このとき，X, Y はそれぞれ正規分布 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ に従う．

(証明は板書で)

定理 2.11

(X, Y) は離散型あるいは連続型.
$f_{X,Y}(x, y)$: 同時確率密度関数
$f_X(x)$, $f_Y(y)$: および周辺確率密度関数

$\Rightarrow$ X と Y が独立であることと

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y), \quad (x,y) \in D = \{(x,y);\ f_{X,Y}(x,y) > 0\}$$

が成り立つことは同値である.

(証明は板書で)

2.5.3. 多次元の場合

多次元離散型分布と連続型分布

k 次元確率変数 $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_k)'$ の取り得る値の集合 D が, $\mathbb{R}^k$ の高々可算集合であるとき, $\boldsymbol{X}$ は離散型確率変数, また, $\boldsymbol{X}$ の分布を離散型分布という.

離散型分布は, 確率関数

$$f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, \ldots, x_k) = \mathsf{P}(X_1 = x_1, \ldots, X_k = x_k), \ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^k$$

によって決定される.

k 次元確率変数 $(X_1, \ldots, X_k)'$ 分布関数が

$$F(x_1, \ldots, x_k) = \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_k} f(s_1, \ldots, s_k) ds_1 \cdots ds_k$$

と表されるとき,$\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_k)'$ は連続型確率変数, また, $\boldsymbol{X}$ の分布を連続型分布という.
$f(x_1, \ldots, x_k)$ を $\boldsymbol{X}$ または, $\boldsymbol{X}$ の分布の確率密度関数という.

多次元確率関数と確率密度関数の性質

- 確率関数 (離散型)
  $X_i\ (i=1,\dots,k)$ の取り得る値を $x_{i1}, x_{i2}, \dots$ とすると
  (1) $f(x_{1j_1},\dots,x_{kj_k}) \geq 0,\ j_i = 1,2,\dots\ \ (i=1,\dots,k)$
  (2) $\displaystyle\sum_{j_1=1}^{\infty}\cdots\sum_{j_k=1}^{\infty} f(x_{1j_1},\dots,x_{kj_k}) = 1$
  同時分布関数：$\displaystyle F(z_1,\dots,z_k) = \sum_{x_{1j_1}\leq z_1}\cdots\sum_{x_{kj_k}\leq z_k} f(x_{1j_1},\dots,x_{kj_k})$
- 確率密度関数 (連続型)
  (1) $f(x_1,\dots,x_k) \geq 0,\ {}^{\forall}(x_1,\dots,x_k) \in \mathbb{R}^k$
  (2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1,\dots,x_k)dx_1\cdots dx_k = 1$
  同時分布関数：
  $$F(x_1,\dots,x_k) = \int_{-\infty}^{x_1}\cdots\int_{-\infty}^{x_k} f(s_1,\dots,s_k)ds_1\cdots ds_k$$
  $$\left(\frac{\partial^k}{\partial x_1\cdots\partial x_k}F(x_1,\dots,x_k) = f(x_1,\dots,x_k)\right)$$

多項分布

1 回の試行で事象 $A_1, \ldots, A_{k+1}$ のいずれかが起こりうる.
A_j が起こる確率を p_j $(j = 1, \ldots, k)$
事象 A_{k+1} が起こる確率は, $p_{k+1} = 1 - (p_1 + \cdots + p_k)$ である.

n 回の独立な試行で, A_j が起こる回数を X_j $(j = 1, \ldots, k)$ とすれば

$$
\begin{aligned}
f(x_1, \ldots, x_k) &= \mathsf{P}(X_1 = x_1, \ldots, X_k = x_k) \\
&= \frac{n!}{x_1! \cdots x_k! x_{k+1}!} p_1^{x_1} \ldots p_{k+1}^{x_{k+1}} \quad (x_{k+1} = n - (x_1 + \ldots + x_k)) \\
&\quad ((x_1, \ldots, x_k) \in D; 0 \leq p_j \ (j = 1, \ldots, k); p_1 + \cdots + p_k \leq 1)
\end{aligned}
$$

ただし,
$D = \{(x_1, \ldots, x_k);\ x_j$ は非負整数 $(j = 1, \ldots, k), x_1 + \cdots + x_k \leq n\}$.
このような分布を, パラメータ $n, (p_1, \ldots, p_k)$ をもつ $(k+1)$ 項分布といい, $M_{k+1}(n, (p_1, \ldots, p_k))$ と表す.

多変量正規分布

$(X_1, \ldots, X_k)'$ の確率密度関数が

$$f(x_1, \ldots, x_k) = (2\pi)^{-k/2}|\Sigma|^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})'\Sigma^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})\right\}$$

と表せるとき, k 次元正規分布に従うという．ここで

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_k \end{pmatrix}, \quad \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \cdots & \sigma_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{k1} & \cdots & \sigma_{kk} \end{pmatrix}.$$

パラメータ $\boldsymbol{\mu}$ は任意の定数, すなわち, $-\infty < \mu_i < \infty$ $(i = 1, \ldots, k)$ で, Σ は正定値行列である.

定理 2.12

$(X_1, \ldots, X_k)'$ は離散型あるいは連続型.
$X_i,\ i = 1, \ldots, k$ の周辺確率密度関数を $f_i(x_i)$,
同時確率密度関数を $f(x_1, \ldots, x_k)$ とする.

このとき, $X_1, \ldots, X_k$ が独立であることと, 任意の
$(x_1, \ldots, x_k)' \in \{(x_1, \ldots, x_k)';\ f(x_1, \ldots, x_k) > 0\}$ に対して

$$f(x_1, \ldots, x_k) = f_1(x_1) \cdots f_k(x_k)$$

が成り立つことは同値である.