確率・統計 A

若木宏文

wakaki@math.sci.hiroshima-u.ac.jp
http://home.hiroshima-u.ac.jp/ wakaki/lecture/index.shtml

2015.6.30

目 次

4.1. 特性関数とモーメント

定義 4.1

X : 確率変数，　$f(x)$: 確率密度関数，または確率関数

$$
\begin{aligned}
\varphi_X(t) &= \mathsf{E}(e^{itX}) \\
&= \begin{cases} \displaystyle\sum_x e^{itx} f(x), & \text{離散型} \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x)dx, & \text{連続型} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \displaystyle\sum_x \cos(tx) f(x) + i \sum_x \sin(tx) f(x), & \text{離散型} \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \cos(tx) f(x)dx + i \int_{-\infty}^{\infty} \sin(tx) f(x)dx, & \text{連続型} \end{cases}
\end{aligned}
$$

を X の特性関数という．

補題 4.1

$g(t)$ を実変数 t の複素数値関数とする. $a < b$ ならば

$$\left| \int_a^b g(t)dt \right| \leq \int_a^b |g(t)|dt.$$

Proof.

$I = \int_a^b g(t)dt$ とおく. θ を I の偏角とすると $I = |I|e^{i\theta}$. したがって

$$|I| = e^{-i\theta} I = \int_a^b e^{-i\theta} g(t)dt = \int_a^b \Re\{e^{-i\theta} g(t)\}dt + i \int_a^b \Im\{e^{-i\theta} g(t)\}dt.$$

ここで, $\Re\{\cdot\}, \Im\{\cdot\}$ はそれぞれ, $\{\ \}$ 内の関数の実部, 虚部である. $|I|$ は実数値なので最後の式の第 2 項は 0 となる. さらに第 1 項の被積分関数について

$$\Re\{e^{-i\theta} g(t)\} \leq |e^{-i\theta} g(t)| = |g(t)|$$

が成り立つことより, 結果が得られる. $\square$

定理 4.1

X の特性関数 $\varphi_X(t)$ について, 次が成り立つ.

(1) $\varphi_X(0) = 1$.

(2) $|\varphi_X(t)| \leq 1$.

(3) $\varphi_X(t)$ は一様連続である.

(4) $\varphi_{cX+d}(t) = e^{itd}\varphi_X(ct)$. ただし, c, d は定数.

(5) $\mathsf{E}(|X|^n) < \infty$ ならば, $\varphi_X(t)$ は C^n 級 (連続な n 次導関数が存在) で

$$\left.\frac{d^n}{dt^n}\varphi_X(t)\right|_{t=0} = i^n \mathsf{E}(X^n).$$

(証明は板書で)

補足 (期待値と優収束定理)

期待値の一般的な定義

X：確率変数,　P_X：X の分布,　$g(x)$：ボレル可測関数

$$\mathsf{E}[g(X)] = \int_{\mathbb{R}} g(x) d\mathsf{P}_X(x)$$ 測度 P_X に関する (ルベーグ) 積分

優収束定理

$g_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$：ボレル可測関数列,　$g(x), h(x)$：ボレル可測関数

1. $\lim_{n\to\infty} g_n(x) = g(x)$
2. $|g_n(x)| \leq h(x)$
3. $\mathsf{E}\{h(X)\} < \infty$

ならば

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{E}\{g_n(X)\} = \mathsf{E}\{g(x)\}$$

例 4.1

(2 項分布) $X \sim B(n,p) \quad \to \quad \varphi_X(t) = \{1 + p(e^{it} - 1)\}^n.$

(ポアソン分布) $X \sim p(\lambda) \quad \to \quad \varphi_X(t) = \exp\{\lambda(e^{it} - 1)\}.$

(一様分布) $X \sim U(0,1) \quad \to \quad \varphi_X(t) = \dfrac{e^{it} - 1}{it}.$

(正規分布) $X \sim N(\mu, \sigma^2) \quad \to \quad \varphi_X(t) = \exp\left(it\mu - \dfrac{1}{2}\sigma^2 t^2\right).$

(導出は板書で (2 項分布と正規分布))

例 4.2

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ のとき, $X - \mu$ の特性関数は

$$
\begin{aligned}
\varphi_{X-\mu}(t) &= e^{(i\sigma t)^2/2} \\
&= 1 + \frac{1}{2}\sigma^2(it)^2 + \frac{1}{2!}\left\{\frac{1}{2}\sigma^2(it)^2\right\}^2 + \cdots + \frac{1}{k!}\left\{\frac{1}{2}\sigma^2(it)^2\right\}^k + \cdots \\
&= 1 + \frac{1}{2!}(i\sigma t)^2 + \frac{1\cdot 3}{4!}(i\sigma t)^4 + \cdots + \frac{1\cdot 3\cdot (2k-1)}{(2k)!}(i\sigma t)^{2k} + \cdots
\end{aligned}
$$

と表せる. 定理 4.1 (5) より

$$
\mathsf{E}\{(X-\mu)^k\} = \begin{cases} 0, & k \text{ が奇数のとき} \\ 1\cdot 3\cdots(k-1)\sigma^k, & k \text{ が偶数のとき}. \end{cases}
$$

定義 4.2 (多次元分布の特性関数)

$\boldsymbol{X}$ を p 次元の確率変数, $\boldsymbol{t} \in \mathbb{R}^p$ とし

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_p \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{t} = \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_p \end{pmatrix}$$

とする. このとき

$$\varphi_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{t}) = \mathsf{E}\{\exp(i\boldsymbol{t}'\boldsymbol{X})\} = \mathsf{E}\left\{\prod_{j=1}^{p} \exp(it_j X_j)\right\}$$

を $\boldsymbol{X}$ の特性関数という.

定理 4.2

次の右辺の期待値が存在すれば等式が成り立つ.

$$\left.\frac{\partial^{n_1+\cdots+n_p}}{\partial t_1^{n_1}\cdots\partial t_p^{n_p}}\varphi_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{t})\right|_{\boldsymbol{t}=\boldsymbol{0}} = i^{(n_1+\cdots+n_p)}\mathsf{E}(X_1^{n_1}\cdots X_p^{n_p}).$$

例 4.3

$\boldsymbol{X} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$ のとき

$$\varphi_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{t}) = \exp\left(i\boldsymbol{t}'\boldsymbol{\mu} - \frac{1}{2}\boldsymbol{t}'\Sigma\boldsymbol{t}\right).$$

$$\Sigma = (\sigma_{jk})_{j,k=1,\ldots,p} \Rightarrow \mathsf{Cov}(X_j, X_k) = \sigma_{jk}$$

(証明は板書で)
⇒slide0707