確率・統計 A

若木宏文

wakaki@math.sci.hiroshima-u.ac.jp
http://home.hiroshima-u.ac.jp/ wakaki/lecture/index.shtml

2015.7.7

目 次

4.2. 分布と特性関数

定理 4.3 (反転公式)

確率変数 X の分布関数, 特性関数をそれぞれ, F_X, φ_X とする. このとき, F_X の連続点 a, b $(a < b)$ において

$$F_X(b) - F_X(a) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} \varphi_X(t) dt$$

が成り立つ.

補題 4.2

(1) $^\forall y \geq 0$ に対して, $0 \leq (\operatorname{sgn}\alpha)\displaystyle\int_0^y \frac{\sin\alpha x}{x}dx \leq \int_0^\pi \frac{\sin x}{x}dx.$

(2) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin\alpha x}{x}dx = \frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}\alpha.$

ただし

$$\operatorname{sgn}\alpha = \begin{cases} 1, & \alpha > 0 \\ 0, & \alpha = 0 \\ -1, & \alpha < 0. \end{cases}$$

補題 4.2 の証明 (1/5)

(1) $\alpha \neq 0$ とする.

$z = \alpha x$ とおくと $dx = \dfrac{dz}{\alpha}$

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{sgn}\alpha) \int_0^y \frac{\sin \alpha x}{x} dx &= (\mathrm{sgn}\alpha) \int_0^{\alpha y} \frac{\sin z}{z} dz \\
&= \begin{cases} \displaystyle\int_0^{\alpha y} \frac{\sin z}{z} dz & (\alpha > 0) \\ \displaystyle\int_{-\alpha y}^0 \frac{\sin z}{z} dz = \int_0^{|\alpha| y} \frac{\sin z}{z} dz & (\alpha < 0) \end{cases}
\end{aligned}
$$

なので, $\alpha = 1$ の場合に証明すればよい.

補題 4.2 の証明 (2/5)

$0 < \pi < 2\pi < \cdots < n\pi \leq y$ (n は正数) とし, $\bar{y} = y - n\pi$ とおく.

$$\int_0^y \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^\pi \frac{\sin x}{x} dx + \int_\pi^{2\pi} \frac{\sin x}{x} dx + \cdots + \int_{n\pi}^{n\pi+\bar{y}} \frac{\sin x}{x} dx$$

$t = x - k\pi$ とおくと

$$\int_{k\pi}^{k\pi+z} \frac{\sin x}{x} dx = (-1)^k \int_0^z \frac{\sin x}{x + k\pi} dx$$

より

$$\int_0^y \frac{\sin x}{x} dx = a_0 - a_1 + a_2 - \cdots + (-1)^{n-1} a_{n-1} + (-1)^n a_n^*$$

$$a_k = \int_0^\pi \frac{\sin x}{x + k\pi} dx \quad (0 \leq k < n), \quad a_n^* = \int_0^{\bar{y}} \frac{\sin x}{x + n\pi} dx,$$

$a_0 > a_1 > a_2 > \cdots > a_{n-1} > a_n^*$ より

$a_0 - a_1 + \ldots + (-1)a_n^* \leq a_0$

補題 4.2 の証明 (3/5)

(2) $\alpha = 1$ の場合を示せばよい.
$y > 0$ に対して, $n\pi \leq y < (n+1)\pi$ となる n を n_y と表す.
$\lim_{y\to\infty} a^*_{n_y} = 0$ であるから

$$\lim_{y\to\infty}\int_0^y \frac{\sin x}{x}dx = \lim_{y\to\infty}\left\{\sum_{k=0}^{n_y}(-1)^k a_k + a^*_{n_y}\right\} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k a_k$$

$S_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k a_k$ とおくと

$$S_{2m-1} < S_{2m+1} < a_0 \quad (m = 1, 2, \cdots),$$
$$S_{2m} - S_{2m-1} = a_{2m} \to 0 \ (m \to \infty)$$

であるから $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k$ は収束し, $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k$

補題 4.2 の証明 (4/5)

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx = \lim_{a\to 0+0}\lim_{b\to\infty}\int_a^b \frac{\sin x}{x}dx$$

$\dfrac{1}{x} = \displaystyle\int_0^\infty e^{-ux}du$ を用いて

$$\int_a^b \frac{\sin x}{x}dx = \int_a^b \left\{\int_0^\infty e^{-ux}\sin x du\right\}dx$$

と表す. $a \le x \le b$ のとき

$$|e^{-ux}\sin x| \le e^{-au}, \quad \int_0^\infty e^{-au}du = \frac{1}{a} < \infty$$

であるから

$$\int_a^b \frac{\sin x}{x}dx = \int_0^\infty \left\{\int_a^b e^{-ux}\sin x dx\right\}du$$

$$\int_a^b e^{-ux}\sin x dx = \left[\frac{e^{-ux}}{1+u^2}(-\cos x - u\sin x)\right]_{x=a}^b$$

(↑ 原始関数)

補題 4.2 の証明 (5/5)

$x \geq 0$ ならば

$$\left|\frac{e^{-ux}}{1+u^2}(-\cos x - u\sin x)\right| \leq \frac{1}{1+u^2}\left\{1 + (e^{-xu}ux)\cdot\left|\frac{\sin x}{x}\right|\right\} \leq \frac{C}{1+u^2}$$

より,

$$\left|\int_a^b e^{-ux}\sin x dx\right| \leq \frac{2C}{1+u^2}, \quad \int_0^\infty \frac{2C}{1+u^2}du < \infty$$

であるから

$$\begin{aligned}
&\lim_{a\to 0+0}\lim_{b\to\infty}\int_0^\infty \left\{\int_a^b e^{-ux}\sin x dx\right\} du \\
&= \int_0^\infty \lim_{a\to 0+0}\lim_{b\to\infty}\left[\frac{e^{-ux}}{1+u^2}(-\cos x - u\sin x)\right]_{x=a}^b du \\
&= \int_0^\infty \frac{1}{1+u^2}du = \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

($\uparrow$ u に関して広義一様収束)

定理 4.3 の証明 (1/3)

(連続型の場合)

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\frac{e^{-ita}-e^{-itb}}{it}\varphi_X(t)dt$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-ita}-e^{-itb}}{it}\cdot e^{itx}f_X(x)dx\right\}dt=(\mathrm{A})$$
$$\left|\frac{e^{-ita}-e^{-itb}}{it}e^{itx}f_X(x)\right|=\left|\int_a^b e^{-itu}du\right|f_X(x)\le|b-a|f_X(x),$$
$$\int_{-\infty}^{\infty}|b-a|f_X(x)dx=|b-a|<\infty$$

より

$$(\mathrm{A})=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-T}^{T}\frac{e^{it(x-a)}-e^{it(x-b)}}{2\pi it}dt f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{I}(T,x,a,b)f_X(x)dx$$

定理 4.3 の証明 (2/3)

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}(T,x,a,b) &= \int_{-T}^{T} \frac{e^{it(x-a)} - e^{it(x-b)}}{2\pi i t} dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{T} \frac{\sin\{t(x-a)\}}{t} dt - \frac{1}{\pi}\int_{0}^{T} \frac{\sin\{t(x-b)\}}{t} dt
\end{aligned}$$

補題 4.2(1) より

$$\|\mathrm{I}(T,x,a,b)\| \leq \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt$$

であるから

$$\lim_{T\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{I}(T,x,a,b) f_X(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T\to\infty} \mathrm{I}(T,x,a,b) f_X(x) dx$$

定理 4.3 の証明 (3/3)

補題 4.2(2) より

$$\mathrm{I}(x,a,b) = \lim_{T\to\infty} \mathrm{I}(T,x,a,b) = \begin{cases} 0, & x < a \\ 1/2, & x = a \\ 1, & a < x < b \\ 1/2, & x = b \\ 0, & x > b \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{I}(x,a,b) f_X(x)dx = \int_a^b f_X(x)dx = F_X(b) - F_X(a)$$

(離散型の場合)
連続型の証明で, x と t についての積分の順序交換の部分が項別積分となり, X の取り得る値を $\{x_1, x_2, \ldots\}$ とすると

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} \phi_X(t)dt = \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{I}(x_k, a, b) f_X(x_k)$$

$$= \frac{1}{2}\mathsf{P}(X = a \text{ または } X = b) + \mathsf{P}(a < X < b) = F_X(b) - F_X(a)$$

補題 4.3 ($k=1$ の場合)

$F(x)$ を分布関数とすると，$F(x)$ の不連続点は高々可算である．したがって，$F(x)$ の連続点の全体は，$\mathbb{R}$ で稠密である

証明 $F(x)$ は右連続であるから，a が不連続点ならば $F(a)-F(a-0)>0$. n を自然数として

$$D_n=\left\{a\in\mathbb{R};\ F(a)-F(a-0)>\frac{1}{n}\right\}$$

とおくと，$F(x)$ の不連続点の全体は，$D:=\bigcup_{n=1}^{\infty}D_n$ と表される．$\#D_n\leq n$ であるから，D は高々可算である．

一意性定理 (1/2)

定理 4.4 (一意性定理)

確率変数 X_1, X_2 の確率分布をそれぞれ μ_1, μ_2 とする．また，それらの特性関数をそれぞれ φ_1, φ_2 とする．このとき

$$\varphi_1 = \varphi_2 \Leftrightarrow \mu_1 = \mu_2$$

が成り立つ．

証明 $\Leftarrow$ は定義から明らか
$\Rightarrow$ を示す．
F_1, F_2 : μ_1, μ_2 の分布関数

$$D = \{x;\ F_1(x), F_2(x) \text{ が共に連続 }\}$$

とする．

一意性定理 (2/2)

補題 4.3 より D は $\mathbb{R}$ で稠密であるから,
任意の $x \in D$ に対して, $y_n < x$ で, $\lim_{n\to\infty} y_n = -\infty$ である点列 $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が存在する. 定理 4.3 より

$$F_1(x) = \lim_{n\to\infty}\{F_1(x) - F_1(y_n)\} = \lim_{n\to\infty}\{F_2(x) - F_2(y_n)\} = F_2(x) \quad (1)$$

補題 4.3 より $x \notin D$ に対して, $x < y_n$ で $\lim_{n\to\infty} y_n = x$ となる点列 $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が存在する. (1) より

$$F_1(x) = \lim_{n\to\infty} F_1(y_n) = \lim_{n\to\infty} F_2(y_n) = F_2(x)$$

再生性

例 4.4 (再生性)

$X_1 + X_2$ の特性関数を求めることにより, 次の結果が得られる.

(1) $X_1 \sim B(m, p)$, $X_2 \sim B(n, p)$, X_1 と X_2 は互いに独立
$\Rightarrow X_1 + X_2 \sim B(m + n, p)$.

(2) $X_1 \sim p(\lambda_1)$, $X_2 \sim p(\lambda_2)$, X_1 と X_2 は互いに独立
$\Rightarrow X_1 + X_2 \sim p(\lambda_1 + \lambda_2)$.

(3) $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$, X_1 と X_2 は互いに独立
$\Rightarrow X_1 + X_2 \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.

注 4.2

例 4.4 のように, X_1, X_2 が独立で, それぞれの分布が, ある分布族に含まれるとき, $X_1 + X_2$ の分布も同じ分布族に含まれるならば, その分布族は再生性を持つという. したがって, 正規分布族, ポアソン分布族, 成功確率 p を固定した 2 項分布族は再生性を持つ.