確率・統計A

若木宏文

wakaki@hiroshima-u.ac.jp
http://home.hiroshima-u.ac.jp/ wakaki/lecture/index.shtml

2018.6.12

講義内容

テキスト

確率・統計の数学的基礎

藤越康祝, 若木宏文, 柳原宏和 著， 広島大学出版会

第 1 章

1.1 不確実性へのアプローチ
1.2 古典的確率
1.3 事象族
1.4 確率
1.5 確率空間の構成
1.6 条件付き確率
1.7 事象の独立性

第 2 章

2.1 確率変数の定義
2.2 分布関数
2.3 多次元確率ベクトルと分布
2.4 確率変数の独立性
2.5 離散型・連続型分布
  2.5.1 1 次元の場合
  2.5.2 2 次元の場合
  2.5.3 多次元の場合

講義内容(続き)

目 次

1.2. 古典的確率

定義と表記

試行: 不確実性を伴う実験や調査.

標本点 (Sample Point): 試行によって起こりうる個々の結果.

標本空間 (Sample Space) Ω: 標本点全体からなる集合.

事象 (Event): Ω の部分集合.

事象 A が起こる: 試行の結果, 事象 A に含まれる標本点のどれかが起こる

$A \cap B$:積事象, $A \cup B$:和事象, A^c:余事象, $\emptyset$:空事象.

例 1.1

サイコロを 1 回振る試行において,

Ω : 標本空間
A :「偶数の目が出る」

という事象は

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \quad A = \{2, 4, 6\}$$

と表せる. この場合 Ω の部分集合は全部で 2^6 個ある.

例 1.2

銅貨を n 回投げる試行において,

Ω : 標本空間および
A :「第 1 回目と第 2 回目に続けて表が出る」

という事象は

$$\Omega = \{(\omega_1, \ldots, \omega_n);\ \omega_i = 0 \text{ または } 1, i = 1, \ldots, n\}$$
$$A = \{(\omega_1, \ldots, \omega_n);\ (\omega_1, \ldots, \omega_n) \in \Omega, \omega_1 = \omega_2 = 1\}$$

で表せる. この場合, 標本点の個数は $N = 2^n$ 個である.
従って, Ω の部分集合は全部で 2^N 個ある.

古典的確率

標本空間 Ω が有限個の点からなる集合で，起こりうる結果がすべて同程度に確からしいと考えられるとき， Ω の部分集合の全体を $\wp(\Omega)$ とし, $\wp(\Omega)$ の各要素 A についてその確率を

$$\mathsf{P}(A) = \frac{A\text{ の要素数}}{\Omega\text{の要素数}}$$

として定める．以下集合 A の要素の数を $\#(A)$ で表す.

例 1.3) 例 1.1 では, $P(A) = \dfrac{1}{6}\#(A) = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$

例 1.4) 例 1.2 では $P(A) = \dfrac{1}{2^n}\#(A) = \dfrac{2^{n-2}}{2^n} = \dfrac{1}{4}$

確率の公理

古典的確率 $\mathsf{P}(A)$ は常に以下の性質を満たしている.

(P1) 任意の $A \in \wp(\Omega)$ に対して, $0 \leq \mathsf{P}(A) \leq 1$.

(P2) $\mathsf{P}(\Omega) = 1$.

(P3′) (有限加法性) $A_i \in \wp(\Omega),\ i = 1, \ldots, n$, $A_i \cap A_j = \emptyset\ (i \neq j)$ ならば

$$\mathsf{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{P}(A_i).$$

1.3. 事象族

定義域の制限

古典的確率では, すべての部分集合に対して確率が定義できたが, 非可算集合ではうまく定義できない場合がある.

例. 回転させた円盤に矢を放ったときの基準線からの角度を測定する.

同様に確からしい $\to$ $\mathsf{P}(a \leq$ 角度 $\leq b) = \dfrac{b-a}{2\pi}$

$\Omega = [0, 2\pi)$ のすべての部分集合に確率を定義しようとすると破綻する.

$\Rightarrow$ 定義域の制限が必要 ($\sigma-$ 集合体)

σ-集合体

定義 1.1

標本空間 Ω の部分集合の集まり $\mathcal{B}$ で次の条件 (B1), (B2), (B3) を満たすものを Ω 上の σ-集合体 (σ-field) または, σ-加法族 という.

(B1) $\Omega \in \mathcal{B}$.

(B2) $A \in \mathcal{B} \Rightarrow A^c \in \mathcal{B}$.

(B3) $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{B} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{B}$.

Ω と Ω 上の σ-集合体 $\mathcal{B}$ の組 $(\Omega, \mathcal{B})$ を 可測空間と呼ぶ.

σ-集合体の例

(1) $N(\Omega) = \{\emptyset, \Omega\}$.

(2) $\sigma[A] = \{\emptyset, A, A^c, \Omega\}$: $A \subset \Omega$ を含む最小の σ-集合体

(3) $\wp(\Omega) = \Omega$ の部分集合全体からなる集合族.

集合体

注 1.1

標本空間 Ω の部分集合の集まり $\mathcal{B}$ で次の (B1), (B2), (B3′) ((B3) の条件を緩めたもの) を満たすものを**集合体**という.

(B1) $\Omega \in \mathcal{B}$.

(B2) $A \in \mathcal{B} \Rightarrow A^c \in \mathcal{B}$.

(B3′) $A_1, A_2 \in \mathcal{B} \Rightarrow A_1 \cup A_2 \in \mathcal{B}$.

σ-集合体の性質 1

(1) σ-集合体は集合体である. ($\because$ 定理 1.1 (2))

(2) 有限個の要素からなる集合体は σ-集合体である.

(3) $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ が Ω 上の σ-集合体ならば, $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2$ も σ-集合体である.

(4) $\{\mathcal{B}_j\}_{j\in J}$ を Ω 上の σ-集合体の集まりとする. このとき, $\displaystyle\bigcap_{j\in J} \mathcal{B}_j$ も σ-集合体である.

(5) $\mathcal{A}$ を Ω 上の集合族とする. このとき, $\mathcal{A}$ を含む最小な σ-集合体 $\sigma[\mathcal{A}]$ が存在する (定理 1.6 を参照).

上極限集合と下極限集合 (1/2)

集合列 $\{A_n\}$ に対して

$\{A_n\}$ の上極限集合: $\displaystyle \varlimsup_{n\to\infty} A_n \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$

無限個の n について事象 A_n が起こること

$\{A_n\}$ の下極限集合: $\displaystyle \varliminf_{n\to\infty} A_n \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$

ある番号から先すべての n について事象 A_n が起こること

一般に $\displaystyle \varliminf_{n\to\infty} A_n \subset \varlimsup_{n\to\infty} A_n$.

特に $\displaystyle \varliminf_{n\to\infty} A_n = \varlimsup_{n\to\infty} A_n \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} A_n$ で表す.

上極限集合と下極限集合 (2/2)

上極限集合: 無限個の n について事象 A_n が起こること
下極限集合: ある番号から先すべての n について 事象 A_n が起こること.

例) 銅貨を無限回投げるとき n 回目に表 が出るという事象
$A_n = \{(\omega_1, \omega_2, \ldots) \in \Omega;\ \omega_n = 1\}$

$$\omega \in \varlimsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} \{k \text{ 回目に表が出る }\}$$

$\Leftrightarrow {}^\forall n\, {}^\exists k (k \geq n)\, [k$ 回目に表が出る$]$

$\Leftrightarrow$ [無限回表が出る]

$$\omega \in \varliminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} \{k \text{ 回目に表が出る }\}$$

$\Leftrightarrow {}^\exists n\, {}^\forall k (k \geq n)\, [k$ 回目に表が出る$]$

$\Leftrightarrow$ [ある回数以降表が出続ける]

σ-集合体の性質 2

定理 1.1

$\mathcal{B}$ を Ω の σ-集合体とする．このとき

(1) $\emptyset \in \mathcal{B}$.

(2) $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{B} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{n} A_i,\ \bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{B}$.

(3) $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{B} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{B}$.

(4) $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{B} \Rightarrow \varliminf_{n\to\infty} A_n,\ \varlimsup_{n\to\infty} A_n \in \mathcal{B}$.

(証明は板書で)

メモ用紙

1.4 確率

古典的確率

標本空間 Ω が有限個の点からなる集合で，起こりうる結果がすべて同程度に確からしいと考えられるとき， Ω の部分集合の全体を $\wp(\Omega)$ とし, $\wp(\Omega)$ の各要素 A についてその確率を

$$\mathsf{P}(A) = \frac{A\text{ の要素数}}{\Omega\text{の要素数}}$$

として定める．以下集合 A の要素の数を $\#(A)$ で表す.

問題点

- 標本点が同程度に確からしいとは言えない場合.
- Ω が無限集合の場合 (可算集合, 非可算集合)

確率の公理 (古典的確率)

古典的確率 $\mathsf{P}(A)$ は常に以下の性質を満たしている.

(P1) 任意の $A \in \wp(\Omega)$ に対して, $0 \le \mathsf{P}(A) \le 1$.

(P2) $\mathsf{P}(\Omega) = 1$.

(P3′) (有限加法性) $A_i \in \wp(\Omega),\ i = 1, \ldots, n$, $A_i \cap A_j = \emptyset\ (i \neq j)$ ならば

$$\mathsf{P}(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{P}(A_i).$$

確率測度

定義 1.2

$(\Omega, \mathcal{B})$ を可測空間とする. $\mathcal{B}$ 上で定義された集合関数 P で次の条件 (P1), (P2), (P3) を満たすものを $(\Omega, \mathcal{B})$ 上の確率測度 (probability measure), または, 単に確率 (probability) という.

(P1) 任意の $A \in \mathcal{B}$ に対して $0 \leq \mathrm{P}(A) \leq 1$.

(P2) $\mathrm{P}(\Omega) = 1$.

(P3) (完全加法的または可算加法性) $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{B}$ で, $A_i \cap A_j = \emptyset \ (i \neq j)$ ならば

$$\mathrm{P}(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{P}(A_i).$$

注 1.2

条件 (P3) よりも弱い条件 (P3′) を満たすとき, P を有限加法的確率 (Finite Additive Probability) と呼ぶ.

定義 1.2 を満たす 3 つの組 $(\Omega, \mathcal{B}, \mathrm{P})$ を確率空間 (Probability Space) という.

古典的確率では, Ω のすべての部分集合を事象と呼ぶ.

$$\Updownarrow$$

確率空間では, $\mathcal{B}$ に含まれる Ω の部分集合のみを事象 (Event) と呼ぶ.

確率測度の性質 1

定理 1.2

P を $(\Omega, \mathcal{B})$ 上の確率とする．このとき，次が成り立つ．

(1) $\mathsf{P}(\emptyset) = 0$.

(2) $A \in \mathcal{B}$ に対し $\mathsf{P}(A^c) = 1 - \mathsf{P}(A)$.

(3) (単調性) $A, B \in \mathcal{B}, A \subset B \Rightarrow \mathsf{P}(A) \leq \mathsf{P}(B)$.

(4) (加法公式)
$A, B \in \mathcal{B} \Rightarrow \mathsf{P}(A \cup B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B) - \mathsf{P}(A \cap B)$.

(5) (有限加法性) $A_i \in \mathcal{B},\ i = 1, \ldots, n,\ A_i \cap A_j = \emptyset\ (i \neq j)$

$$\Rightarrow \mathsf{P}\Big(\bigcup_{i=1}^n A_i\Big) = \sum_{i=1}^n \mathsf{P}(A_i).$$

(6) (有限劣加法性) $A_i \in \mathcal{B},\ i = 1, \ldots, n$

$$\Rightarrow \mathsf{P}\Big(\bigcup_{i=1}^n A_i\Big) \leq \sum_{i=1}^n \mathsf{P}(A_i).$$

(証明は板書で)

メモ用紙

メモ用紙

確率測度の性質 2

定理 1.3

P を $(\Omega, \mathcal{B})$ 上の確率とし, $\{A_n\}$ を $\mathcal{B}$ に属する事象列とする. このとき, 次が成り立つ.

(1) (劣加法性) $\mathrm{P}(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}(A_n)$.

(2) $\{A_n\}$ が単調増加列のとき, $\mathrm{P}(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(A_n)$.

(3) $\{A_n\}$ が単調減少列のとき, $\mathrm{P}(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(A_n)$.

(4) (連続性) $\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \underline{\lim_{n\to\infty}} A_n$ のとき

$$\mathrm{P}(\lim_{n\to\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(A_n).$$

メモ用紙

メモ用紙

ボレル・カンテリの定理

定理 1.4

$(\Omega, \mathcal{B}, \mathsf{P})$ を確率空間, $A_i \in \mathcal{B}$, $i = 1, 2, \ldots$ とする. このとき

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}(A_n) < \infty \Rightarrow \mathsf{P}(\overline{\lim}_{n\to\infty} A_n) = 0.$$

(証明は板書で)

1.5. 確率空間の構成

標本点が有限個の場合

Ω が有限集合で $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ とする.
標本点 ω_i が起こる確率を

$$\mathsf{P}(\{\omega_i\}) = p_i, \ i = 1, \ldots, n,$$
$$p_1 + \cdots + p_n = 1$$

として,

$$\mathsf{P}(A) = \sum_{\omega_i \in A} p_i, \ A \in \wp(\Omega)$$

と定めると, P は $\Omega, \wp(\Omega)$ 上の有限加法的確率であることがわかる.
Ω が有限集合なので, 可算加法性も満たす.

標本空間が可算集合の場合

定理 1.5

Ω が可算集合で $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$ とする.
実数列 $\{p_1, p_2, \ldots\}$ で

$$p_i \geq 0 \ (i = 1, 2, \ldots), \quad \sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$$

なるものをとり, $\mathsf{P}(\{\omega_i\}) = p_i \ (i = 1, 2, \ldots)$ とする. さらに

$$\mathsf{P}(A) = \sum_{\omega_i \in A} p_i, \ A \in \wp(\Omega)$$

と定めると, P は $\Omega, \wp(\Omega)$ 上の確率測度となる. すなわち,
(P1), (P2), (P3) を満たす.

(証明は板書で)

メモ用紙

メモ用紙

標本空間が非可算集合の場合

標本空間 Ω が実数全体，あるいは, 銅貨を無限回なげるような非可算集合の場合, すべての集合に確率の公理を満たすように確率 P を定義するのが困難.

確率空間の構成手順

1. 基本的な事象の集まり M を定める.
   M の要素である Ω の部分集合に対して確率 (の元) を定義.
2. M を含む最小な σ-集合体 $\sigma[M]$ をとる. (定理 1.6)
3. M 上で定義された確率を $\sigma[M]$ 上に拡張する.(測度の拡張定理)

定理 1.6

M を Ω の任意の部分集合族とする. このとき M を含む最小の σ-集合体が一意的に存在する. これを $\sigma[M]$ と書き, M から生成される Ω 上の σ-集合体という.

[証明]

$\mathcal{M}$ を M を含む Ω 上の σ-集合体 $\mathcal{B}$ の全体とし,

$$\mathcal{B}_0 = \bigcap_{\mathcal{B}\in\mathcal{M}} \mathcal{B}$$

と定義すると, $M \subset \mathcal{B}_0$, $\mathcal{B}_0 \in \mathcal{M}$, および $\forall \mathcal{B} \in \mathcal{M}, (\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{B})$ が成り立つ.

ボレル集合

$\Omega = \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$
$J_1 = \{(a, b];\ -\infty < a < b < \infty\}$
のとき $\sigma[J_1] = \mathbb{B}_1$ と書き, 1 次元ボレル集合体という.
ボレル集合体 $\mathbb{B}_1$ に属する集合をボレル集合という.

$(a, b), [a, b], [a, b), (-\infty, b], (-\infty, b), [a, \infty), (a, \infty), \{a\}$ および, すべての開集合, 閉集合はボレル集合である.

例.

$$(a, b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (a, b - n^{-1}] \in \mathbb{B}_1, \qquad [a, b] = \bigcap_{n=1}^{\infty} (a - n^{-1}, b] \in \mathbb{B}_1$$

確率と積分

$(\mathbb{R}, \mathbb{B}_1)$ 上の確率 P を, 次の (1), (2) をみたす関数 $f(x)$ の積分として定義することができる.

(1) すべての x に対して $f(x) \geq 0$

(2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

すなわち, 任意の a, b $(a < b)$ に対して

$$\mathrm{P}((a, b]) = \int_a^b f(x)dx$$

と定義する.

(ボレル集合 A に対して, $\mathrm{P}(A) = \displaystyle\int_A f(x)dx$ (ルベーグ積分) と一致)

正規分布

例 1.11 (1 次元正規分布 (ガウス測度))
$\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$ とするとき, 任意の a, b $(a < b)$ に対して

$$\mathsf{P}((a,b]) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] dx$$

となるような確率を, 平均 μ, 分散 σ^2 の正規分布 (ガウス測度) という

m 次元ボレル集合体 (1/2)

$\Omega = \mathbb{R}^m$
$J_m = \{(a_1, b_1] \times \cdots \times (a_m, b_m];\ -\infty < a_k < b_k < \infty\ k = 1, \ldots, m\}$
のとき, $\sigma[J_m] = \mathbb{B}_m$ と書き, m 次元ボレル集合体という.

2 つの可測空間 $(\Omega_1, \mathcal{B}_1), (\Omega_2, \mathcal{B}_2)$ が与えられたとき,
$\sigma[\{A \times B;\ A \in \mathcal{B}_1, B \in \mathcal{B}_2\}] = \mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2$ と書き, $\mathcal{B}_1$ と $\mathcal{B}_2$ の直積 σ-集合体という.
また, $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2)$ を $(\Omega_1, \mathcal{B}_1), (\Omega_2, \mathcal{B}_2)$ の直積可測空間という.

2-次元ボレル集合体は, 2 個の 1 次元ボレル集合体の直積, すなわち,

$$\mathbb{B}_2 = \mathbb{B}_1 \times \mathbb{B}_1$$

である.

m 次元ボレル集合体 (2/2)

同様に
m 個の可測空間 $(\Omega_i, \mathcal{B}_i), (i = 1, \ldots, m)$ が与えられたとき,
$\sigma[\{A_1 \times \cdots \times A_m;\ A_i \in \mathcal{B}_i, i = 1, \ldots, m\}] = \mathcal{B}_1 \times \cdots \times \mathcal{B}_m$
と書き, $\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_m$ の直積 σ-集合体という.
また, $(\Omega_1 \times \cdots \times \Omega_m, \mathcal{B}_1 \times \cdots \mathcal{B}_m)$ を $(\Omega_1, \mathcal{B}_1), \ldots, (\Omega_m, \mathcal{B}_m)$
の直積可測空間という.

m-次元ボレル集合体は, m 個の 1 次元ボレル集合体の直積,
すなわち,

$$\mathbb{B}_m = \mathbb{B}_1 \times \cdots \times \mathbb{B}_1 \ (m \text{ 個})$$

である.