確率・統計A

若木宏文

wakaki@hiroshima-u.ac.jp
http://home.hiroshima-u.ac.jp/ wakaki/lecture/index.shtml

2018.6.19

目 次

1.6. 条件付き確率

例 1.12

(問) 1 組 52 枚のカードから 1 枚のカードを抜き出す試行を考える．抜き出されたカードがスペードであるという情報が与えられたとき，どのような確率を考えればよいか．

(答) 標本空間は $\Omega = \{s_1, \ldots, s_{13}, t_1, \ldots, t_{39}\}$ とし，抜き出されたカードがスペードであるという事象を $B = \{s_1, \ldots, s_{13}\}$ とする．このとき，各標本点の確率を

$$\mathsf{P}(\{s_i\} \mid B) = \mathsf{P}_B(\{s_i\}) = \frac{1}{13} = \frac{\frac{1}{52}}{\frac{13}{52}},$$

$$\mathsf{P}(\{t_i\} \mid B) = \mathsf{P}_B(\{t_i\}) = 0,$$

とすればよい．

条件付き確率の定義

定義 1.3

$(\Omega, \mathcal{B}, \mathsf{P})$ を確率空間, $A, B \in \mathcal{B}$ とし, $\mathsf{P}(B) \neq 0$ とする．このとき

$$\mathsf{P}(A|B) = \frac{\mathsf{P}(A \cap B)}{\mathsf{P}(B)}$$

を事象 B が与えられたときの事象 A の条件付き確率 (Condistional Probability) という.

定理 1.7

$(\Omega, \mathcal{B}, \mathsf{P})$ を確率空間, $A, B \in \mathcal{B}$ とし, $\mathsf{P}(B) \neq 0$ とする. B を固定し, $A \in \mathcal{B}$ に対して

$$\mathsf{P}_B(A) = \mathsf{P}(A|B)$$

とおく. このとき, P_B は $(\Omega, \mathcal{B})$ 上の確率である.

(証明は演習問題)

$$0 \le \mathsf{P}_B(A) \le 1, \quad \mathsf{P}_B(\Omega) = 1,$$
$$\mathsf{P}_B\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathsf{P}_B(A_i) \ (A_i \cap A_j = \emptyset \ (i \neq j))$$

を示す.

乗法公式

定義 1.3 より

$$\begin{aligned}\mathsf{P}(A_1 \cap A_2) &= \mathsf{P}(A_1)\mathsf{P}(A_2|A_1), \\ \mathsf{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) &= \mathsf{P}(A_1 \cap A_2)\mathsf{P}(A_3|A_1 \cap A_2) \\ &= \mathsf{P}(A_1)\mathsf{P}(A_2|A_1)\mathsf{P}(A_3|A_1 \cap A_2)\end{aligned}$$

が成立する.

$$\begin{aligned}&\mathsf{P}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) \\ &= \mathsf{P}(A_1)\mathsf{P}(A_2|A_1)\mathsf{P}(A_3|A_1 \cap A_2) \\ &\quad \times \mathsf{P}(A_4|A_1 \cap A_2 \cap A_3) \cdots \mathsf{P}(A_n|A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}).\end{aligned}$$

ただし, $\mathsf{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}) > 0$ とする.

Bayes の公式

定理 1.8 (ベイズの公式)

事象列 $\{B_i\}$ は互いに素で, $B_i \in \mathcal{B}, \mathsf{P}(B_i) > 0$, $i = 1, 2, \ldots,$ かつ

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = \Omega$$

とする. このとき, 任意の $A \in \mathcal{B}$, $\mathsf{P}(A) > 0$ に対して

$$\mathsf{P}(B_i|A) = \frac{\mathsf{P}(B_i)\mathsf{P}(A|B_i)}{\sum_{j=1}^{\infty} \mathsf{P}(B_j)\mathsf{P}(A|B_j)}.$$

(証明は板書で)

メモ用紙

Bayes の公式の解釈

試行の結果，$B_1, B_2, \ldots,$ のいずれかが起こり，その影響で事象 A が起こったとする.

- 事前：事象 A が起こる前のこと.
- 事後: 事象 A が起こった後のこと.
- $\mathsf{P}(B_i)$:事前確率 (事象 B_i に対して $\mathsf{P}(B_i)$ は事象 A が起こる前に与えられている確率であるから).
- $\mathsf{P}(B_i|A)$:事後確率 (事象 A が起こった後で与えられる確率であるから).

Bayes の公式は, 事後確率は事前確率を用いて表されることを示している

例 1.13

各々2 つの引き出しがついた箱が 3 つある.

- 箱 1 の引出しには両方とも金のコインが入っている.
- 箱 2 には, 一方の引き出しに金のコイン・他方の引き出しに銀のコインが入っている.
- 箱 3 の引き出しには両方とも銀のコインが入っている.

箱をランダムに選び, 引出しをあけたところ金のコインが入っていた. この箱の他方の引き出しに金のコインが入っている確率を求めよ.

(解答は板書で)

メモ用紙

メモ用紙

1.7. 事象の独立性

事象の独立 (1/2)

2 つの事象 $A, B \in \mathcal{B}$ について

$$\mathsf{P}(A \cap B) = \mathsf{P}(A)\mathsf{P}(B)$$

が成り立つとき, A と B は互いに独立であるという.

このとき, $0 < \mathsf{P}(B) < 1$ ならば

$$\mathsf{P}(A|B) = \mathsf{P}(A), \quad \mathsf{P}(A|B^c) = \mathsf{P}(A)$$

が成り立つ. $\Rightarrow$ A の条件付き確率は B の生起に無関係

同様に $0 < \mathsf{P}(A) < 1$

$\Rightarrow$ B の条件付き確率は A の生起に無関係

事象の独立 (2/2)

$$
\begin{aligned}
A \text{ と } B \text{ が独立} &\Leftrightarrow A \text{ と } B^c \text{が独立} \\
&\Leftrightarrow A^c \text{と } B \text{ が独立} \\
&\Leftrightarrow A^c \text{と } B^c \text{が独立}
\end{aligned}
$$

が成り立つ.

一般に $\mathsf{P}(A \cap B^c) = \mathsf{P}(A) - \mathsf{P}(A \cap B)$ であることを用いる.

(証明は板書で)

メモ用紙

3個の事象の独立性

定義 1.4

3個の事象 A_1, A_2, A_3 が独立であるとは次の条件

$$\begin{aligned} \mathsf{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) &= \mathsf{P}(A_1)\mathsf{P}(A_2)\mathsf{P}(A_3) \\ \mathsf{P}(A_1 \cap A_2) &= \mathsf{P}(A_1)\mathsf{P}(A_2) \\ \mathsf{P}(A_2 \cap A_3) &= \mathsf{P}(A_2)\mathsf{P}(A_3) \\ \mathsf{P}(A_3 \cap A_1) &= \mathsf{P}(A_3)\mathsf{P}(A_1) \end{aligned}$$

が満たされるときをいう.

例 1.14

コインを 2 回投げる試行
標本空間 $\Omega = \{(H,H),(H,T),(T,H),(T,T)\}$
$A = \{(H,H),(H,T)\}$: 1 回目に表がでる事象
$B = \{(H,H),(T,H)\}$; 2 回目に表がでる事象
$C = \{(H,T),(T,H)\}$: 表と裏が 1 回づつ出る事象

$$\mathsf{P}(A\cap B) = \mathsf{P}(A\cap C) = \mathsf{P}(B\cap C) = \frac{1}{4}$$
$$\mathsf{P}(A) = \mathsf{P}(B) = \mathsf{P}(C) = \frac{1}{2}$$

より, どの 2 つの事象も互いに独立

$$\mathsf{P}(A\cap B\cap C) = 0 \neq \mathsf{P}(A)\mathsf{P}(B)\mathsf{P}(C) = \frac{1}{8}$$

n 個の事象の独立性

定義 1.5

n 個の事象 $A_1, \ldots, A_n$ が独立であるとは, これらから任意に m 個 $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_m}$ $(1 \leq i_1 < \cdots < i_m \leq n)$ をとるとき

$$\mathsf{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_m}) = \mathsf{P}(A_{i_1})\mathsf{P}(A_{i_2}) \cdots \mathsf{P}(A_{i_m})$$

が満たされることをいう.

任意の事象族 $\{A_\lambda;\ \lambda \in \Lambda\}$ について, その任意の有限部分族が独立であるとき, 事象族 $\{A_\lambda;\ \lambda \in \Lambda\}$ は独立であるという.

定理

定理 1.9

事象 $A_1, \cdot, A_n \in \mathcal{B}$ が独立のとき，その一部を余事象で置き換えて得られる事象族も独立である．
すなわち，B_i $(i = 1, \ldots, n)$ を A_i または A_i^c とするとき，$B_1, \ldots, B_n$ は互いに独立である．

定理 1.10

事象 $A_1, \ldots, A_n$ が独立であるための必要十分条件は，$B_i = A_i$ または $B_i = A_i^c$ $(i = 1, \ldots, n)$ のすべての組み合わせに対して

$$\mathsf{P}(B_1 \cap \cdots \cap B_n) = \mathsf{P}(B_1) \times \cdots \times \mathsf{P}(B_n)$$

が成り立つことである．

(証明は板書で)

メモ用紙

メモ用紙

メモ用紙

2.1. 確率変数の定義

確率変数とは

試行の結果は必ずしも数値をとるとは限らない.
試行の各結果によって値が定まるある量 X に関心がある場合が多い.

例 1) 1 枚の銅貨を 2 回投げるとき, 表の出た回数 X に関心がある場合.
　標本空間 $\Omega = \{(H,H),(H,T),(T,H),(T,T)\}$ の各点に対して X は

$$X(H,H)=2,\ X(H,T)=1,\ X(T,H)=1,\ X(T,T)=0$$

例 2) ある試行による 事象 A の生起に関心がある場合

$$X(\omega)=\begin{cases}1 & (\omega\in A)\\ 0 & (\omega\in A^c)\end{cases}$$

確率変数の定義

定義 2.1

$(\Omega, \mathcal{B}, \mathsf{P})$ を確率空間とする．このとき，Ω 上の実数値関数 $X(\omega)$ が任意の実数 a に対して

$$\{\omega;\ X(\omega) \le a\} \in \mathcal{B}$$

を満たすとき，関数 $X(\omega)$ を $(\Omega, \mathcal{B}, \mathsf{P})$ または $(\Omega, \mathcal{B})$ の確率変数 (random variable) という．

注 2.1

- $\mathcal{B} = \wp(\Omega)$ の場合には, Ω 上の実数値関数 $X(\omega)$ は確率変数である.
  Ω が有限集合, あるいは, 可算集合の場合には通常 $\mathcal{B} = \wp(\Omega)$ と定めるので, すべての実数値関数は確率変数である.
- 一般の確率空間 $(\Omega, \mathcal{B}, \mathrm{P})$ では, 確率変数であるかどうかは $\mathcal{B}$ に依存している.

注 2.1(1/2)

銅貨を無限回投げる試行において, n 回目に表が出れば 1, 裏が出れば 0 とする確率変数を X_n とする. このとき, 初めて表が出たときの銅貨を投げた回数 T は, 各 $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n, \ldots)$ に対し

$$T(\omega) = \begin{cases} n, & X_j(\omega) = 0,\ j = 1, \ldots, n-1,\ X_n(\omega) = 1 \\ +\infty, & \text{その他} \end{cases}$$

と表され, $T(\omega) = +\infty$ となるのは毎回裏が出る場合に限られるから

$$\{\omega;\ T(\omega) = +\infty\} \subset \{\omega;\ X_1(\omega) = \cdots = X_n(\omega) = 0\}$$

であり, これらの事象の確率を考え $n \to \infty$ とすると

$$\mathsf{P}(\{\omega;\ T(\omega) = +\infty\}) \leq \lim_{n\to\infty} 2^{-n} = 0$$

である.

注 2.1(2/2)

確率変数のとる値として, $+\infty$ を認めることによって統一的に議論することができる.

Ω 上の関数 $X(\omega)$ が実数, または, $+\infty, -\infty$ を値としてとる場合には, 定義 2.1 の条件に加えて

$$\{\omega;\ X(\omega) = +\infty\} \in \mathcal{B}, \quad \{\omega;\ X(\omega) = -\infty\} \in \mathcal{B}$$

を満たすものを確率変数とする.

この授業では, 特に断らない限り, 確率変数といえば, 実数値をとるものとする.

定理 2.1

X を Ω 上の実数値関数とする. 次の条件 (1), (2) は同値である.

(1) X が $(\Omega, \mathcal{B})$ 上の確率変数である.

(2) 任意の $A \in \mathbb{B}_1$ に対して

$$X^{-1}(A) = \{\omega;\ X(\omega) \in A\} \in \mathcal{B}.$$

(証明は板書で)

メモ用紙

メモ用紙

定理 2.2

X を $(\Omega, \mathcal{B})$ 上の確率変数とし, 任意の $A \in \mathbb{B}_1$ に対して

$$\mathsf{P}_X(A) = \mathsf{P}(X^{-1}(A))$$

とすると, P_X は $(\mathbb{R}, \mathbb{B}_1)$ 上の確率である.

定理 2.2 の P_X を 確率変数 X によって誘導された確率分布 (測度) (induced probability distribution (measure)), あるいは, 単に 確率変数 X の分布 (distribution) という.

(証明は演習問題)

2.2. 分布関数

定義 2.2

X を $(\Omega, \mathcal{B}, \mathsf{P})$ 上の確率変数とする $\mathbb{R}$ 上で定義された関数

$$F_X(x) = \mathsf{P}(\{\omega;\ X(\omega) \leq x\})$$

を X の分布関数という.

以下, $F_X(x)$ を単に $F(x)$ と書く.

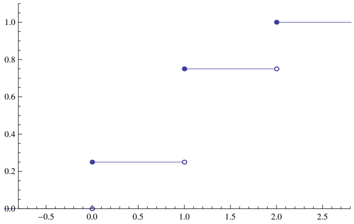
事象 $\{\omega;\ X(\omega) \leq x\}$ を単に, $"X \leq x"$ と書く. 確率 P, 確率分布 P_X と分布関数の関係は

$$F(x) = \mathsf{P}(X \leq x) = \mathsf{P}_X((-\infty, x])$$

例 2.1

(1) 銅貨を 2 回投げる試行で, 表が出た回数を X とする.

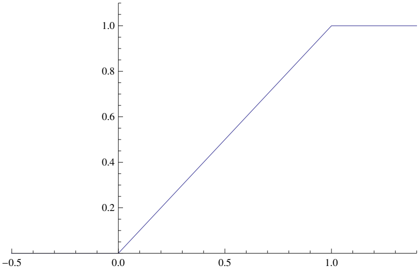
$$F(x) = \begin{cases} \mathsf{P}(\emptyset) = 0 & x < 0 \\ \mathsf{P}(\{(T,T)\}) = \dfrac{1}{4} & 0 \leq x < 1 \\ \mathsf{P}(\{(T,T),(T,H),(H,T)\}) = \dfrac{3}{4} & 1 \leq x < 2 \\ \mathsf{P}(\Omega) = 1 & 2 \leq x \end{cases}$$



例 2.1 続き

(2) 区間 $(0,1]$ からランダムに 1 つの実数値を選ぶ試行で選ばれた実数を X とする.

$$F(x)=\begin{cases} \mathrm{P}(\emptyset)=0 & x\le 0 \\ \mathrm{P}(0<X\le x)=x & 0<x<1 \\ \mathrm{P}(0<X\le 1)=1 & 1\le x \end{cases}$$



定理 2.3

任意の実数 a, b $(a < b)$ に対して

$$\mathrm{P}(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$$

(証明は板書で)

分布関数の性質

定理 2.4

分布関数 $F(x)$ は次の性質をもつ

(F0) $0 \leq F(x) \leq 1,$

(F1) (単調性) $x_1 < x_2$ ならば $F(x_1) \leq F(x_2),$

(F2) (右連続性) $F(x+0) = F(x),$

(F3) $F(-\infty) = 0, \ F(\infty) = 1.$

(証明は板書で)

メモ用紙

メモ用紙

メモ用紙

注 2.4

分布と分布関数の 1 対 1 対応
確率変数 X が与えられると，その分布関数が定義 2.2 で定義される.

逆に，定理 2.4 を満たす関数 $F(x)$ が与えられると，

$$\mathsf{P}_X((a,b]) = F(b) - F(a)$$

となるような $(\mathbb{R}, \mathbb{B}_1)$ 上の分布 P_X が一意的に定義されることが知られている. (ルベーグ・スティルチェス測度)