確率・統計 A

若木宏文

wakaki@hiroshima-u.ac.jp
http://home.hiroshima-u.ac.jp/ wakaki/lecture/index.shtml

2018.7.24

目 次

4.1. 特性関数とモーメント

定義 4.1

X : 確率変数, $f(x)$: 確率密度関数, または確率関数

$$
\begin{aligned}
\varphi_X(t) &= \mathsf{E}(e^{itX}) \\
&= \begin{cases} \displaystyle\sum_x e^{itx} f(x), & \text{離散型} \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x)dx, & \text{連続型} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \displaystyle\sum_x \cos(tx) f(x) + i \sum_x \sin(tx) f(x), & \text{離散型} \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \cos(tx) f(x)dx + i \int_{-\infty}^{\infty} \sin(tx) f(x)dx, & \text{連続型} \end{cases}
\end{aligned}
$$

を X の特性関数という.

補題 4.1

$g(t)$ を実変数 t の複素数値関数とする. $a < b$ ならば

$$\left| \int_a^b g(t)dt \right| \leq \int_a^b |g(t)|dt.$$

Proof.

$I = \displaystyle\int_a^b g(t)dt$ とおく. θ を I の偏角とすると $I = |I|e^{i\theta}$.

$$|I| = e^{-i\theta} I = \int_a^b e^{-i\theta} g(t)dt = \int_a^b \Re\{e^{-i\theta} g(t)\}dt + i \int_a^b \underbrace{\Im\{e^{-i\theta} g(t)\}}_{=0}dt.$$

ここで, $\Re\{\cdot\}, \Im\{\cdot\}$ はそれぞれ, $\{\ \}$ 内の関数の実部, 虚部.

$$\Re\{e^{-i\theta} g(t)\} \leq |e^{-i\theta} g(t)| = |g(t)|$$

□

定理 4.1

X の特性関数 $\varphi_X(t)$ について, 次が成り立つ.

(1) $\varphi_X(0) = 1$.

(2) $|\varphi_X(t)| \leq 1$.

(3) $\varphi_X(t)$ は一様連続である.

(4) $\varphi_{cX+d}(t) = e^{itd}\varphi_X(ct)$. ただし, c, d は定数.

(5) $\mathsf{E}(|X|^n) < \infty$ ならば, $\varphi_X(t)$ は C^n 級 (連続な n 次導関数が存在) で

$$\left.\frac{d^n}{dt^n}\varphi_X(t)\right|_{t=0} = i^n \mathsf{E}(X^n).$$

(証明 (4),(5) は板書で)

メモ用紙

メモ用紙

補足 (期待値と優収束定理)

期待値の一般的な定義

X：確率変数，　P_X：X の分布，　$g(x)$：ボレル可測関数

$$\mathsf{E}[g(X)] = \int_{\mathbb{R}} g(x) d\mathsf{P}_X(x)$$　測度 P_X に関する (ルベーグ) 積分

優収束定理

$g_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$：ボレル可測関数列，
$g(x), h(x)$：ボレル可測関数

1. $\lim_{n\to\infty} g_n(x) = g(x)$
2. $|g_n(x)| \le h(x)$
3. $\mathsf{E}\{h(X)\} < \infty$

ならば　$\lim_{n\to\infty} \mathsf{E}\{g_n(X)\} = \mathsf{E}\{g(x)\}$

補足 (微分と期待値の順序交換)

$g(x,y), h(x)$: ボレル可測関数,

1. $g(x,y)$ は y で偏微分可能
2. $\left|\dfrac{\partial}{\partial y} g(x,y)\right| \le h(x)$
3. $\mathsf{E}\{h(X)\} < \infty$

ならば $\dfrac{d}{dy}\mathsf{E}[g(X,y)] = \mathsf{E}\left[\dfrac{\partial}{\partial y} g(X,y)\right]$

例 4.1

$$
\begin{array}{llcl}
(2\text{ 項分布}) & X \sim B(n,p) & \to & \varphi_X(t) = \{1 + p(e^{it} - 1)\}^n. \\
(\text{ポアソン分布}) & X \sim p(\lambda) & \to & \varphi_X(t) = \exp\{\lambda(e^{it} - 1)\}. \\
(\text{一様分布}) & X \sim U(0,1) & \to & \varphi_X(t) = \dfrac{e^{it} - 1}{it}. \\
(\text{正規分布}) & X \sim N(\mu,\sigma^2) & \to & \varphi_X(t) = \exp\left(it\mu - \dfrac{1}{2}\sigma^2 t^2\right).
\end{array}
$$

(導出は板書で (2 項分布と正規分布))

メモ用紙

メモ用紙

メモ用紙

例 4.2

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ のとき, $X - \mu$ の特性関数は

$$
\begin{aligned}
\varphi_{X-\mu}(t) &= e^{(i\sigma t)^2/2} \\
&= 1 + \frac{1}{2}\sigma^2(it)^2 + \frac{1}{2!}\left\{\frac{1}{2}\sigma^2(it)^2\right\}^2 + \cdots + \frac{1}{k!}\left\{\frac{1}{2}\sigma^2(it)^2\right\}^k + \cdots \\
&= 1 + \frac{1}{2!}(i\sigma t)^2 + \frac{1\cdot 3}{4!}(i\sigma t)^4 + \cdots + \frac{1\cdot 3\cdot(2k-1)}{(2k)!}(i\sigma t)^{2k} + \cdots
\end{aligned}
$$

と表せる. 定理 4.1 (5) より

$$
\mathrm{E}\{(X-\mu)^k\} = \begin{cases} 0, & k \text{ が奇数のとき} \\ 1\cdot 3\cdots(k-1)\sigma^k, & k \text{ が偶数のとき}. \end{cases}
$$

定義 4.2 (多次元分布の特性関数)

$\boldsymbol{X}$ を p 次元の確率変数, $\boldsymbol{t} \in \mathbb{R}^p$ とし

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_p \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{t} = \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_p \end{pmatrix}$$

とする. このとき

$$\varphi_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{t}) = \mathsf{E}\{\exp(i\boldsymbol{t}'\boldsymbol{X})\} = \mathsf{E}\left\{\prod_{j=1}^{p} \exp(it_j X_j)\right\}$$

を $\boldsymbol{X}$ の特性関数という.

定理 4.2

次の右辺の期待値が存在すれば等式が成り立つ.

$$\left.\frac{\partial^{n_1+\cdots+n_p}}{\partial t_1^{n_1}\cdots\partial t_p^{n_p}}\varphi_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{t})\right|_{\boldsymbol{t}=\boldsymbol{0}} = i^{(n_1+\cdots+n_p)}\mathsf{E}(X_1^{n_1}\cdots X_p^{n_p}).$$

例 4.3

$\boldsymbol{X} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$ のとき

$$\varphi_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{t}) = \exp\left(i\boldsymbol{t}'\boldsymbol{\mu} - \frac{1}{2}\boldsymbol{t}'\Sigma\boldsymbol{t}\right).$$

$$\Sigma = (\sigma_{jk})_{j,k=1,\ldots,p} \Rightarrow \mathsf{Cov}(X_j, X_k) = \sigma_{jk}$$

メモ用紙

4.2. 分布と特性関数

定理 4.3 (反転公式)

確率変数 X の分布関数, 特性関数をそれぞれ, F_X, φ_X とする. このとき, F_X の連続点 a, b $(a < b)$ において

$$F_X(b) - F_X(a) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} \varphi_X(t)dt$$

が成り立つ.

一意性定理

定理 4.4 (一意性定理)

確率変数 X_1, X_2 の確率分布をそれぞれ μ_1, μ_2 とする．また，それらの特性関数をそれぞれ φ_1, φ_2 とする．このとき

$$\varphi_1 = \varphi_2 \Leftrightarrow \mu_1 = \mu_2$$

が成り立つ．

証明 $\Leftarrow$ は定義から明らか
$\Rightarrow$ を示す．
F_1, F_2 : μ_1, μ_2 の分布関数

$$D = \{x;\ F_1(x), F_2(x) \text{ が共に連続 } \}$$

とする．

一意性定理 (証明で使う補題)

補題 4.3 ($k = 1$ の場合)
$F(x)$ を分布関数とすると, $F(x)$ の不連続点は高々可算である.
したがって, $F(x)$ の連続点の全体は, $\mathbb{R}$ で稠密である

証明 $F(x)$ は右連続であるから, a が不連続点ならば
$F(a) - F(a-0) > 0$. n を自然数として

$$D_n = \left\{ a \in \mathbb{R};\ F(a) - F(a-0) > \frac{1}{n} \right\}$$

とおくと, $F(x)$ の不連続点の全体は, $D := \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$ と表される.
$\# D_n \leq n$ であるから, D は高々可算である.

一意性定理 (証明の続き)

補題 4.3 より D は $\mathbb{R}$ で稠密であるから,
任意の $x \in D$ に対して, $y_n < x$ で, $\lim_{n\to\infty} y_n = -\infty$ である
D 内の点列 $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が存在する. 定理 4.3 より

$$\begin{aligned} F_1(x) &= \lim_{n\to\infty}\{F_1(x) - F_1(y_n)\} \\ &= \lim_{n\to\infty}\{F_2(x) - F_2(y_n)\} = F_2(x) \end{aligned} \tag{1}$$

補題 4.3 より $x \notin D$ に対して, $x < y_n$ で $\lim_{n\to\infty} y_n = x$ となる
D 内の点列 $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が存在する. (1) より

$$F_1(x) = \lim_{n\to\infty} F_1(y_n) = \lim_{n\to\infty} F_2(y_n) = F_2(x)$$

再生性

例 4.4 (再生性)

$X_1 + X_2$ の特性関数を求めることにより, 次の結果が得られる.

(1) $X_1 \sim B(m,p)$, $X_2 \sim B(n,p)$, X_1 と X_2 は互いに独立
$\Rightarrow X_1 + X_2 \sim B(m+n,p)$.

(2) $X_1 \sim p(\lambda_1)$, $X_2 \sim p(\lambda_2)$, X_1 と X_2 は互いに独立
$\Rightarrow X_1 + X_2 \sim p(\lambda_1 + \lambda_2)$.

(3) $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$, X_1 と X_2 は互いに独立
$\Rightarrow X_1 + X_2 \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.

注 4.2

例 4.4 のように, X_1, X_2 が独立で, それぞれの分布が, ある分布族に含まれるとき, $X_1 + X_2$ の分布も同じ分布族に含まれるならば, その分布族は再生性を持つという. したがって, 正規分布族, ポアソン分布族, 成功確率 p を固定した 2 項分布族は再生性を持つ.

メモ用紙