

確率・統計 A

若木宏文

wakaki@hiroshima-u.ac.jp

<http://home.hiroshima-u.ac.jp/wakaki/lecture/index.shtml>

2018.7.24

目次

特性関数

特性関数とモーメント
分布と特性関数



4.1. 特性関数とモーメント



定義 4.1

X : 確率変数, $f(x)$: 確率密度関数, または確率関数

$$\varphi_X(t) = E(e^{itX})$$

$$= \begin{cases} \sum_x e^{itx} f(x), & \text{離散型} \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x) dx, & \text{連続型} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \sum_x \cos(tx) f(x) + i \sum_x \sin(tx) f(x), & \text{離散型} \\ \int_{-\infty}^{\infty} \cos(tx) f(x) dx + i \int_{-\infty}^{\infty} \sin(tx) f(x) dx, & \text{連続型} \end{cases}$$

を X の特性関数という。

補題 4.1

$g(t)$ を実変数 t の複素数値関数とする. $a < b$ ならば

$$\left| \int_a^b g(t) dt \right| \leq \int_a^b |g(t)| dt.$$

Proof.

$I = \int_a^b g(t) dt$ とおく. θ を I の偏角とすると $I = |I|e^{i\theta}$.

$$|I| = e^{-i\theta} I = \int_a^b e^{-i\theta} g(t) dt = \int_a^b \Re\{e^{-i\theta} g(t)\} dt + i \int_a^b \Im\{e^{-i\theta} g(t)\} dt.$$

$= 0$

ここで, $\Re\{\cdot\}$, $\Im\{\cdot\}$ はそれぞれ, $\{\cdot\}$ 内の関数の実部, 虚部.

$$\Re\{e^{-i\theta} g(t)\} \leq |e^{-i\theta} g(t)| = |g(t)|$$

□

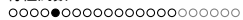
定理 4.1

X の特性関数 $\varphi_X(t)$ について, 次が成り立つ.

- (1) $\varphi_X(0) = 1$.
- (2) $|\varphi_X(t)| \leq 1$.
- (3) $\varphi_X(t)$ は一様連続である.
- (4) $\varphi_{cX+d}(t) = e^{itd} \varphi_X(ct)$. ただし, c, d は定数.
- (5) $E(|X|^n) < \infty$ ならば, $\varphi_X(t)$ は C^n 級 (連続な n 次導関数が存在) で

$$\left. \frac{d^n}{dt^n} \varphi_X(t) \right|_{t=0} = i^n E(X^n).$$

(証明 (4),(5) は板書で)



メモ用紙

特性関数

○○○○○●○○○○○○○○○○○○○○○○○○

メモ用紙

補足 (期待値と優収束定理)

期待値の一般的な定義

X : 確率変数, P_X : X の分布, $g(x)$: ボレル可測関数

$$E[g(X)] = \int_{\mathbb{R}} g(x) dP_X(x) \quad \text{測度 } P_X \text{ に関する (ルベーク) 積分}$$

優収束定理

$g_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) : ボレル可測関数列,
 $g(x), h(x)$: ボレル可測関数

- $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = g(x)$
- $|g_n(x)| \leq h(x)$ ならば $\lim_{n \rightarrow \infty} E\{g_n(X)\} = E\{g(x)\}$
- $E\{h(X)\} < \infty$

補足 (微分と期待値の順序交換)

$g(x, y), h(x)$: ボレル可測関数,

1. $g(x, y)$ は y で偏微分可能

2. $\left| \frac{\partial}{\partial y} g(x, y) \right| \leq h(x)$

3. $E\{h(X)\} < \infty$

ならば $\frac{d}{dy} E[g(X, y)] = E\left[\frac{\partial}{\partial y} g(X, y) \right]$

例 4.1

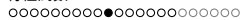
$$(2 \text{ 項分布}) \quad X \sim B(n, p) \quad \rightarrow \quad \varphi_X(t) = \{1 + p(e^{it} - 1)\}^n.$$

$$(\text{ポアソン分布}) \quad X \sim p(\lambda) \quad \rightarrow \quad \varphi_X(t) = \exp\{\lambda(e^{it} - 1)\}.$$

$$(\text{一様分布}) \quad X \sim U(0, 1) \quad \rightarrow \quad \varphi_X(t) = \frac{e^{it} - 1}{it}.$$

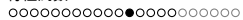
$$(\text{正規分布}) \quad X \sim N(\mu, \sigma^2) \quad \rightarrow \quad \varphi_X(t) = \exp\left(it\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2\right).$$

(導出は板書で(2項分布と正規分布))



メモ用紙

メモ用紙



メモ用紙

例 4.2

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ のとき, $X - \mu$ の特性関数は

$$\begin{aligned} \varphi_{X-\mu}(t) &= e^{(i\sigma t)^2/2} \\ &= 1 + \frac{1}{2}\sigma^2(it)^2 + \frac{1}{2!}\left\{\frac{1}{2}\sigma^2(it)^2\right\}^2 + \cdots + \frac{1}{k!}\left\{\frac{1}{2}\sigma^2(it)^2\right\}^k + \cdots \\ &= 1 + \frac{1}{2!}(i\sigma t)^2 + \frac{1 \cdot 3}{4!}(i\sigma t)^4 + \cdots + \frac{1 \cdot 3 \cdot (2k-1)}{(2k)!}(i\sigma t)^{2k} + \cdots \end{aligned}$$

と表せる. 定理 4.1 (5) より

$$E\{(X - \mu)^k\} = \begin{cases} 0, & k \text{ が奇数のとき} \\ 1 \cdot 3 \cdots (k-1)\sigma^k, & k \text{ が偶数のとき.} \end{cases}$$

定義 4.2 (多次元分布の特性関数)

\mathbf{X} を p 次元の確率変数, $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^p$ とし

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_p \end{pmatrix}, \quad \mathbf{t} = \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_p \end{pmatrix}$$

とする. このとき

$$\varphi_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) = \mathbb{E}\{\exp(it'\mathbf{X})\} = \mathbb{E}\left\{\prod_{j=1}^p \exp(it_j X_j)\right\}$$

を \mathbf{X} の特性関数という.

定理 4.2

次の右辺の期待値が存在すれば等式が成り立つ。

$$\frac{\partial^{n_1+\dots+n_p}}{\partial t_1^{n_1} \dots \partial t_p^{n_p}} \varphi_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) \Big|_{\mathbf{t}=\mathbf{0}} = i^{(n_1+\dots+n_p)} \mathbf{E}(X_1^{n_1} \dots X_p^{n_p}).$$

例 4.3

$\mathbf{X} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$ のとき

$$\varphi_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) = \exp \left(i\mathbf{t}'\boldsymbol{\mu} - \frac{1}{2}\mathbf{t}'\Sigma\mathbf{t} \right).$$

$$\Sigma = (\sigma_{jk})_{j,k=1,\dots,p} \Rightarrow \text{Cov}(X_j, X_k) = \sigma_{jk}$$

メモ用紙

4.2. 分布と特性関数

定理 4.3 (反転公式)

確率変数 X の分布関数, 特性関数をそれぞれ, F_X, φ_X とする. このとき, F_X の連続点 a, b ($a < b$) において

$$F_X(b) - F_X(a) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} \varphi_X(t) dt$$

が成り立つ.

一意性定理

定理 4.4 (一意性定理)

確率変数 X_1, X_2 の確率分布をそれぞれ μ_1, μ_2 とする. また, それらの特性関数をそれぞれ φ_1, φ_2 とする. このとき

$$\varphi_1 = \varphi_2 \Leftrightarrow \mu_1 = \mu_2$$

が成り立つ.

証明 \Leftarrow は定義から明らか
 \Rightarrow を示す.

$F_1, F_2 : \mu_1, \mu_2$ の分布関数

$$D = \{x; F_1(x), F_2(x) \text{ が共に連続} \}$$

とする.

一意性定理 (証明で使う補題)

補題 4.3 ($k = 1$ の場合)

$F(x)$ を分布関数とすると, $F(x)$ の不連続点は高々可算である.
したがって, $F(x)$ の連続点の全体は, \mathbb{R} で稠密である

証明 $F(x)$ は右連続であるから, a が不連続点ならば
 $F(a) - F(a - 0) > 0$. n を自然数として

$$D_n = \left\{ a \in \mathbb{R}; F(a) - F(a - 0) > \frac{1}{n} \right\}$$

とおくと, $F(x)$ の不連続点の全体は, $D := \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$ と表される.
 $\#D_n \leq n$ であるから, D は高々可算である.

一意性定理 (証明の続き)

補題 4.3 より D は \mathbb{R} で稠密であるから,
任意の $x \in D$ に対して, $y_n < x$ で, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = x$ である
 D 内の点列 $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が存在する. 定理 4.3 より

$$\begin{aligned} F_1(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \{F_1(x) - F_1(y_n)\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \{F_2(x) - F_2(y_n)\} = F_2(x) \end{aligned} \quad (1)$$

補題 4.3 より $x \notin D$ に対して, $x < y_n$ で $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = x$ となる
 D 内の点列 $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が存在する. (1) より

$$F_1(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_1(y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_2(y_n) = F_2(x)$$

再生性

例 4.4 (再生性)

$X_1 + X_2$ の特性関数を求めることにより, 次の結果が得られる.

- (1) $X_1 \sim B(m, p)$, $X_2 \sim B(n, p)$, X_1 と X_2 は互いに独立
 $\Rightarrow X_1 + X_2 \sim B(m + n, p)$.
- (2) $X_1 \sim p(\lambda_1)$, $X_2 \sim p(\lambda_2)$, X_1 と X_2 は互いに独立
 $\Rightarrow X_1 + X_2 \sim p(\lambda_1 + \lambda_2)$.
- (3) $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$, X_1 と X_2 は互いに独立
 $\Rightarrow X_1 + X_2 \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.

注 4.2

例 4.4 のように, X_1, X_2 が独立で, それぞれの分布が, ある分布族に含まれるとき, $X_1 + X_2$ の分布も同じ分布族に含まれるならば, その分布族は**再生性**を持つという. したがって, 正規分布族, ポアソン分布族, 成功確率 p を固定した 2 項分布族は再生性を持つ.



メモ用紙