確率・統計A　中間試験問題

令和元年7月5日

問題1. Ω を空でない集合とする.

(1) $\mathcal{B}$ が Ω 上の σ-集合体であることの定義を書け.

(2) $\mathcal{B}$ が Ω 上の σ-集合体であるとき, σ-集合体の定義のみを用いて次を示せ.

(i) $A, B \in \mathcal{B} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{B}$　　(ii) $A, B \in \mathcal{B} \Rightarrow A \cap B^c \in \mathcal{B}$

問題2. Ω を空でない集合とし, $(\Omega, \mathcal{B})$ は可測空間であるとする.

(1) P が $(\Omega, \mathcal{B})$ 上の確率測度であることの定義を書け.

(2) $(\Omega, \mathcal{B}, \mathrm{P})$ が確率空間であるとき, 確率測度の定義のみを用いて次を示せ. ただし, σ-集合体に関する性質は証明せずに用いてよい.

(i) $A, B \in \mathcal{B},\ A \cap B = \emptyset$ ならば $\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B)$

(ii) $A, B \in \mathcal{B},\ A \subset B$ ならば $\mathrm{P}(B \cap A^c) = \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A)$

問題3. $\mathbb{R}$ を実数全体からなる集合とする. $\{(-\infty, 0], (-\infty, 1]\}$ を (部分集合族として) 含む最小の<u>集合体</u>を求めよ.

問題4. 1次元ボレル集合体 $\mathbb{B}_1$ は $J_1 = \{(a, b];\ -\infty < a < b < \infty\}$ を部分集合族として含む $\mathbb{R}$ 上の最小の σ-集合体として定義される.

任意の実数 a に対して $[a, \infty) \in \mathbb{B}_1$ であることを示せ.

問題5. X, Y を確率空間 $(\Omega, \mathcal{B}, \mathrm{P})$ 上の確率変数とし, Ω 上の関数 $Z(\omega)$ を $Z(\omega) = -Y(\omega)$ と定義する.

(1) Z は $(\Omega, \mathcal{B}, \mathrm{P})$ 上の確率変数であることを示せ.

(2) 次の (i), (ii) は同値であることを示せ.

(i) X, Y は互いに独立である.　　(ii) X, Z は互いに独立である.

(問題5では, 講義で扱った内容は証明なしに用いてよい. ただし, どのような性質を用いたか説明すること.)