ホップ (E. Hopf) の拡張定理

Theorem 0.1 有限加法的測度空間 $(\Omega, \mathcal{B}_0, \mathrm{P}_0)$ が σ-加法的ならば, $\mathcal{B} = \sigma[B]$ とするとき, $(\Omega, \mathcal{B})$ 上の測度で任意の $A \in \mathcal{B}_0$ に対して $\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}_0(A)$ となるものが存在する. さらに, $(\Omega, \mathcal{B}_0, \mathrm{P}_0)$ が σ-有限ならば, このような P は一意に定まる.

$(\Omega, \mathcal{B}_0, \mathrm{P}_0)$ が有限加法的測度空間であるとは

(1) $\mathcal{B}_0$ が Ω の集合体:

(A1) $\Omega \in \mathcal{B}_0$

(A2) $A \in \mathcal{B}_0 \Rightarrow A^c \in \mathcal{B}_0$

(A3) $A, B \in \mathcal{B}_0 \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{B}_0$

(2) P_0 が $(\Omega, \mathcal{B}_0)$ 上の有限加法的測度:

(M1) 任意の $A \in \mathcal{B}_0$ に対して $0 \leq \mathrm{P}_0(A) \leq \infty$

(M2) $A, B \in \mathcal{B}_0$ に対して $A \cap B = \emptyset$ ならば $\mathrm{P}_0(A \cup B) = \mathrm{P}_0(A) + \mathrm{P}_0(B)$
（有限加法性）

が成り立つことである. さらに, $\mathrm{P}_0(\Omega) = 1$ ならば, P_0 は有限加法的確率測度という.

$(\Omega, \mathcal{B}_0, \mathrm{P}_0)$ が σ-有限であるとは, $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n$ となるような $\{\Omega_n \,|\, n = 1, 2, \ldots\}$ が存在して, $\mathrm{P}_0(\Omega_n) < \infty$ であることを言う.

$(\Omega, \mathcal{B}_0, \mathrm{P}_0)$ が σ-加法的であるとは,

(B3) $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{B}_0,\ A_j \cap A_k = \emptyset\ (j \neq k)$ かつ, $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{B}_0$ ならば

$$\mathrm{P}_0(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}_0(A_n)$$

が成り立つことを言う (加算加法性)

注. 集合体では, $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{B}_0$ ならば $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{B}_0$ とは限らない.

σ-加法的でない有限加法的確率空間の例

$$\Omega = (0, 1],$$

$$M = \left\{ \bigcup_{k=1}^{n} I_k \,\middle|\, I_k = (a_k, b_k],\ 0 \leq a_k < b_k \leq 1,\ k = 1, \ldots, n;\ n = 1, 2, \ldots \right\}$$

とすると, M は Ω の集合体であり, 任意の $A \in M$ は

$$A = \sum_{k=1}^{n} I_k,\ I_k \cap I_j = \emptyset\ (i \neq j)$$

と表すことができる. M 上の確率 P を

$$\mathrm{P}\{(a,b]\} = \begin{cases} \frac{1}{2}(b-a) & 0 < a < b \leq 1 \\ \dfrac{1+b}{2} & a = 0 < b \leq 1 \end{cases},$$

$$A = \bigcup_{k=1}^{n} I_k,\ I_j \cap I_k = \emptyset\ (j \neq k) \text{ と表して } \mathrm{P}(A) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{P}(I_k)$$

と定めると, (Ω, M, P) は有限加法的確率空間となることが示せる.

数列 $\{a_n\}$ を, $1 \geq a_n > a_{n+1}, (n = 1, 2, \dots)$ で, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ となるものとし, $I_n = (a_{n+1}, a_n]$ $(n = 1, 2, \dots)$ と定めると

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n = (0, a_1] \in M,$$

$$\mathrm{P}(\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n) = \frac{1+a_1}{2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}(I_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n - a_{n+1}}{2} = \frac{a_1}{2}$$

となり, 加算加法性は成り立たない.

外測度

$A \subset \Omega$ に対して

$$\mathrm{P}^*(A) = \inf\Big\{ \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{P}(I_k) \,\Big|\, I_k \in M\ (k = 1, 2, \dots,), A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \Big\}$$

によって定まるような P^* は Ω 上の外測度となる。

$$^{\forall}B \subset \Omega,\ \mathrm{P}^*(B) = \mathrm{P}^*(B \cap A) + \mathrm{P}^*(B \cap A^c)$$

が成り立つ A を P^*-可測集合といい, P^*-可測集合の全体を $\mathcal{B}$ とすると $(\Omega, \mathcal{B}, \mathrm{P}^*)$ は測度空間になる. しかし, 任意の a, b $(0 \leq a < b \leq 1)$ に対して $\mathrm{P}^*((a,b]) = \frac{b-a}{2}$ であり, $\mathrm{P}^*(\Omega) = \frac{1}{2}$ なので, P^* は確率測度にはならない.