$\Omega = [0, 2\pi)$ の任意の部分集合に,「自然な」確率を定義しようとすると破綻する件

$x, y \in \Omega$ に対して 2 項演算 $\oplus$ を

$$x \oplus y = \begin{cases} x + y & (x + y < 2\pi) \\ x + y - 2\pi & (x + y \geq 2\pi) \end{cases}$$

と定義し, 集合 $x \in I$, $A \subset \Omega$ に対して, $A \oplus x = \{a \oplus x \,|\, a \in A\}$ と定める. このとき, $y \in \Omega$ に対して, Ω から Ω への写像 g_y を $g_y(x) = x \oplus y$ と定めると, g_y は全単射であることが示せる.

x と単位円周上の点 $(\cos x, \sin x)$ を対応させれば, $x \oplus y$ は 点 $(\cos x, \sin x)$ を y だけ回転させた点に対応する. また $A \oplus x$ は A に対応する円周上の図形を x だけ回転させた図形に対応する.

Ω 上のどの点も同様に確からしいとするならば, 区間 $I \subset \Omega$ の確率は I の長さだけで決まるのが自然であり, その場合, 回転させても長さは変わらないので, $\mathrm{P}(I \oplus x) = \mathrm{P}(I)$ となる. しかし, すべての Ω の部分集合 A と $x \in \Omega$ に対して $\mathrm{P}(A \oplus x) = \mathrm{P}(A)$ が成り立つような確率測度 P は存在しない.

Ω に 2 項関係 $\sim$ を

$$x \sim y \Leftrightarrow {}^{\exists} q \in \mathbb{Q} \cap \Omega \; s.t. \; y = x \oplus q$$

と定めると, $\sim$ は同値関係となる. $x, y \in \Omega$ の同値類を $\mathbb{Q}_x, \mathbb{Q}_y$ とすると, $\mathbb{Q}_x = \mathbb{Q}_y$ または $\mathbb{Q}_x \cap \mathbb{Q}_y = \emptyset$ であるから, 相異なる同値類から選んだ代表元からなる集合を Λ とすると, Ω は

$$\Omega = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mathbb{Q}_\lambda, \quad \alpha \neq \beta \Rightarrow \mathbb{Q}_\alpha \cap \mathbb{Q}_\beta = \emptyset$$

と分割できる.

$$\begin{aligned} x \in \Omega &\Leftrightarrow {}^{\exists!} \lambda \in \Lambda \; s.t. \; x \in \mathbb{Q}_\lambda \\ &\Leftrightarrow {}^{\exists!} \lambda \in \Lambda \; {}^{\exists!} q \in \mathbb{Q} \cap \Omega \; s.t. \; x = \lambda \oplus q \\ &\Leftrightarrow x \in \bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap \Omega} (\Lambda \oplus q) \end{aligned}$$

ここで, 記号 $\exists!$ は「一意に存在する」を表す. したがって, Ω は

$$\Omega = \bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap \Omega} (\Lambda \oplus q), \quad q, r \in \mathbb{Q} \cap \Omega, q \neq r \Rightarrow (\Lambda \oplus q) \cap (\Lambda \oplus r) = \emptyset$$

と分割できる. $\mathbb{Q} \cap \Omega$ は可算集合であるから, $\mathbb{Q} \cap \Omega = \{q_1, q_2, \ldots\}$ と表すと,

$$\Omega = \bigcup_{k=1}^{\infty} (\Lambda \oplus q_k)$$

となり, 可算加法性から

$$\mathrm{P}(\Omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{P}(\Lambda \oplus q_k)$$

が成り立たなければならないが, 回転しても確率が変わらないとするならば

$$\mathrm{P}(\Omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{P}(\Lambda)$$

となり, $\mathrm{P}(\Lambda) = 0$ としても, $\mathrm{P}(\Lambda) > 0$ としても $\mathrm{P}(\Omega) = 1$ が成り立たない.