確率・統計 A 練習問題

1. $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ とする．Ω の部分集合族 $\{\{1\}, \{2\}\}$ を含む最小の σ-集合体を求めよ．

2. σ-集合体の定義のみを用いて, $\mathcal{B}$ が σ-集合体であるとき, $A, B \in \mathcal{B}$ ならば $A \cap B \in \mathcal{B}$ であることを示せ.

3. P を, 可測空間 $(\Omega, \mathcal{B})$ 上の確率とする．確率の定義のみを用いて, $A, B \in \mathcal{B}$ ならば
   $\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B)$
   であることを示せ．ただし, σ-集合体の性質 ($A \cap B \in \mathcal{B}$ であること) などは証明せずに用いてよい.

4. $\mathbb{R}^2$ の閉区間の族 $K = \{[a, b];\ -\infty < a < b < \infty\}$ を含む最小の σ-集合体を $\sigma[K]$ と表す．このとき, 以下の問いに答えよ.
   (a) 任意の実数 a, b $(a < b)$ に対して, $(a, b] \in \sigma[K]$ であることを示せ.
   (b) $\sigma[K] = \mathbb{B}_1$ (1 次元ボレル集合体) であることを示せ.

5. $\Omega = (0, 1]$ とし, $\mathcal{B} = \{A \subset \Omega;\ A \in \mathbb{B}_1\}$ と定義する．ただし, $\mathbb{B}_1$ は 1 次元ボレル集合体である．このとき, 以下の問いに答えよ.
   (a) $\mathcal{B}$ は Ω 上の σ-集合体であることを示せ.
   (b) P は $(\Omega, \mathbb{B})$ 上の確率で, $(a, b] \subset \Omega$ に対して $\mathrm{P}((a, b]) = b - a$ を満たすとする.
   このとき $\mathrm{P}(\{2^{-n};\ n = 1, 2, \ldots\})$ の値を求めよ.

6. $(\Omega, \mathcal{B}, \mathrm{P})$ を確率空間とし, $A, B \in \mathcal{B}$, $0 < \mathrm{P}(B) < 1$ であるとする．このとき, 次の (a), (b), (c) は同値であることを示せ.
   (a) A, B は独立　(b) $\mathrm{P}(A|B) = \mathrm{P}(A)$　(c) $\mathrm{P}(A|B^c) = \mathrm{P}(A)$

7. $(\Omega, \mathcal{B}, \mathrm{P})$ を確率空間とし, $A, B \in \mathcal{B}$, $\mathrm{P}(A) > 0,\ 0 < \mathrm{P}(B) < 1$ であるとする.
   このとき, $\mathrm{P}(A|B) > \mathrm{P}(A|B^c)$ ならば $\mathrm{P}(B|A) > \mathrm{P}(B)$ であることを証明せよ.

8. X を $(\Omega, \mathbb{B}, \mathrm{P})$ 上の確率変数とする．$Y = [X]$ は確率変数であるかどうか調べよ．ただし, 実数値 x に対して $[x]$ はガウス記号, すなわち, x を超えない最大の整数値を表わす.

9. 標本空間 $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ 上の関数 $X(k) = (k - 2)^2$ が確率変数となるような, 最小の σ-集合体を求めよ.

10. X を集合 Ω 上の実数値関数とする．$A \subset \mathbb{R}$ に対して $X^{-1}(A^c) = \{X^{-1}(A)\}^c$ であることを示せ.

11. $\mathbb{R}^2$ 上のひし形領域 $\Omega = \{(x, y);\ |x + y| \le 1,\ |x - y| \le 1\}$ からランダムに点を選ぶ試行を考える．ここで, ランダムとは, 領域 (ボレル集合) $A \subset \mathbb{R}^2$ から点が選ばれる確率が, $A \cap \Omega$ の面積に比例することを意味する．この試行によって選ばれた点を (X, Y) とするとき, 以下の問いに答えよ.
    (a) $Z = X+Y, W = X-Y$ と定義するとき, $\mathrm{P}(Z \le z, W \le w)$ の値を求めよ．ただし, $-1 \le z \le 1, -1 \le w \le 1$ とする.
    (b) (Z, W) の同時分布関数を求めよ.
    (c) Z, W は独立であることを示せ.