確率・統計A　レポート1

令和元年7月19日

問題1. Ω を空でない集合とする.

(1) $\mathcal{B}$ が Ω 上の σ-集合体であることの定義を書け.

(2) $\mathcal{B}$ が Ω 上の σ-集合体であるとき, σ-集合体の定義のみを用いて次を示せ.
$A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{B} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathcal{B}$

問題2. Ω を空でない集合とし, $(\Omega, \mathcal{B})$ は可測空間であるとする.

(1) P が $(\Omega, \mathcal{B})$ 上の確率測度であることの定義を書け.

(2) $(\Omega, \mathcal{B}, \mathrm{P})$ が確率空間であるとき, 確率測度の定義のみを用いて次を示せ. ただし, σ-集合体に関する性質は証明せずに用いてよい.

(i) $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{B},\ A_i \cap A_j = \emptyset\ (i \neq j)$ ならば $\mathrm{P}(\bigcup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n \mathrm{P}(A_i)$
(ii) $A, B \in \mathcal{B}$ ならば $\mathrm{P}(B \cap A^c) = \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B)$

問題3. $\mathbb{R}$ を実数全体からなる集合とする. $\{(-\infty, 1), (0, \infty)\}$ を (部分集合族として) 含む最小の<u>集合体</u>を求めよ.

問題4. $J = \{(a, b);\ -\infty < a < b < \infty\}$ とし, J を部分集合族として含む $\mathbb{R}$ 上の最小の σ-集合体を $\mathbb{B}$ とする.

任意の実数 a に対して $[a, \infty) \in \mathbb{B}$ であることを示せ.

問題5. $(\Omega, \mathcal{B}, \mathrm{P})$ を確率空間とし, f を Ω 上で定義された実数値関数であるとする. 次の (i), (ii) は同値であることを示せ.

(i) 任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して, $\{\omega \in \Omega;\ f(\omega) \leq a\} \in \mathcal{B}$

(ii) 任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して, $\{\omega \in \Omega;\ f(\omega) < a\} \in \mathcal{B}$