確率・統計 A

若木宏文

wakaki@hiroshima-u.ac.jp
http://home.hiroshima-u.ac.jp/ wakaki/lecture/index.shtml

2019.6.26

目次

2.3. 多次元確率ベクトルと分布

多次元データ (Multivariate data)

互いに関連 (相関) がある観測値の組が n 個あるようなデータセット

番号	国語	社会	数学	理科	英語
	テストの点数				
1	80	96	81	100	93
2	60	61	39	57	57
3	63	50	41	45	59
4	100	98	75	93	98
5	56	41	26	40	32
6	74	77	65	84	71
7	86	83	62	74	80
8	65	52	43	62	57
9	75	66	45	60	69
10	57	64	47	58	57

それぞれの個人の点数を観測ベクトル $\boldsymbol{x}_i$ とする.
例) $\boldsymbol{x}_6 = (74, 77, 65, 84, 71)'$

観測行列 $\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}'_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{x}'_n \end{bmatrix}$ とする.

多次元確率変数

試行の結果に対して, 複数個の変数を同時に解析したい.

例. 全国学力試験受験者を無作為に選んで, その国語, 社会, 数学, 理科, 英語の得点を調べる.

$\Rightarrow$ Ω の各要素 (標本点) に対して, k 個の変数 $X_1, \ldots, X_k$ の値が定まる.

$(\Omega, \mathcal{B}, \mathrm{P})$ 上で定義された k 個の確率変数 $X_1, \ldots, X_k$ を成分とするベクトル $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_k)'$ を k 次元確率ベクトル (k 次元確率変数) と呼ぶ.

多次元確率変数の分布関数

k 次元確率変数 $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_k)'$ を考える.
$\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_k)' \in \mathbb{R}^k$ に対して

$$
\begin{aligned}
F(x_1, \ldots, x_k) &= \mathsf{P}(X_1 \le x_1, \ldots, X_k \le x_k) \\
&= \mathsf{P}(\textstyle\bigcap_{i=1}^k \{\omega;\ X_i(\omega) \le x_i\})
\end{aligned}
$$

によって定義される関数 $F(\boldsymbol{x})$ を $\boldsymbol{X}$ の分布関数, あるいは同時分布関数, 結合分布関数 (joint distribution function) という.

1 次元確率変数の場合と同様に k 次元確率ベクトル $\boldsymbol{X}$ によって $(\mathbb{R}^k, \mathbb{B}_k)$ 上に

$$
\begin{aligned}
\mathsf{P}_{\boldsymbol{X}}(A_1 \times \cdots \times A_k) &\equiv \mathsf{P}(\boldsymbol{X}^{-1}(A_1 \times \cdots \times A_k)) \\
&= \mathsf{P}(\{\omega;\ X_1(\omega) \in A_1, \ldots, X_k(\omega) \in A_k\})
\end{aligned}
$$

となる確率分布 $\mathsf{P}_{\boldsymbol{X}}$ が導入される.
これを k 次元確率ベクトル $\boldsymbol{X}$ の分布と呼ぶ.

例

例 2.2

$\mathbb{R}^2$ 上の区間 $\Omega = (0,1] \times (0,1]$ からランダムに点を選ぶ試行を考える．この試行によって選ばれた点を (X,Y) とする．このとき，(X,Y) の分布関数は

$$F(x,y) = \mathsf{P}(X \le x, Y \le y) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \text{ or } y \le 0 \\ xy, & 0 < x \le 1,\ 0 < y \le 1 \\ x, & 0 < x \le 1,\ 1 < y \\ y, & 1 < x,\ 0 < y \le 1 \\ 1, & 1 < x,\ 1 < y \end{cases}$$

となる．

定理 2.5

任意の実数 a_i, b_i $(a_i < b_i)$, $i = 1, \ldots, k$ に対して

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}(a_1 < X_1 \le b_1, \ldots, a_k < X_k \le b_k)\\&\quad = \Delta_{x_1}(a_1, b_1)\cdots\Delta_{x_k}(a_k, b_k)F(x_1, \ldots, x_k)\end{aligned}$$

が成り立つ．ただし

$$\begin{aligned}&\Delta_{x_i}(a_i, b_i)F(x_1, \ldots, x_k)\\&= F(x_1, \ldots, x_{i-1}, b_i, x_{i+1}, \ldots, x_k) - F(x_1, \ldots, x_{i-1}, a_i, x_{i+1}, \ldots, x_k).\end{aligned}$$

とくに，$k = 2$ とすると

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}(a_1 < X_1 \le b_1, a_2 < X_2 \le b_2)\\&\quad = F(b_1, b_2) - F(b_1, a_2) - F(a_1, b_2) + F(a_1, a_2).\end{aligned}$$

(証明は板書で)

メモ用紙

メモ用紙

定理 2.6

k 次元確率変数 $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_k)'$ の分布関数 $F(x_1, \ldots, x_k)$ は次の性質をもつ.

(F0) $0 \leq F(x_1, \ldots, x_k) \leq 1$.

(F1) 任意の実数 a_i, b_i $(a_i < b_i)$, $i = 1, \ldots, k$ に対して

$$\Delta_{x_1}(a_1, b_1) \cdots \Delta_{x_k}(a_k, b_k) F(x_1, \ldots, x_k) \geq 0$$

(F2) (右連続性) $F(x_1 + 0, \ldots, x_k + 0) = F(x_1, \ldots, x_k)$.

(F3) $F(x_1, \ldots, x_{i-1}, -\infty, x_{i+1}, \ldots, x_k) = 0$, $F(\infty, \ldots, \infty) = 1$.

注 2.6

- (F1)〜(F3) を満たす関数 $F(x_1, \ldots, x_k)$ は, (F0) も満たす.
- 定理とは逆に, (F1)〜(F3) を満たす関数 $F(x_1, \ldots, x_k)$ が分布関数となるような $(\mathbb{R}^k, \mathbb{B}_k)$ 上の分布が一意に存在する.

周辺分布

分布関数の定義において, i を除くすべての j について $x_j \to \infty$ とすると

$$\mathsf{P}(X_i \leq x_i) = F(\infty, \ldots, x_i, \infty, \ldots, \infty)$$

が成り立ち, $F(\infty, \ldots, x_i, \infty, \ldots, \infty)$ は X_i の分布関数であることがわかる. これを 周辺分布関数 (marginal distribution function) という.

例 2.3

例 2.2 において, X の周辺分布関数は

$$F_X(x) = \mathsf{P}(X \leq x) = \mathsf{P}(X \leq x, Y < \infty) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ x, & 0 < x \leq 1 \\ 1, & 1 < x \end{cases}$$

で与えられる. Y の周辺分布関数も同様に求められる.

2.4. 確率変数の独立性

確率変数の独立性

(復習) 2 つの事象 A, B について

$$\mathsf{P}(A \cap B) = \mathsf{P}(A)\mathsf{P}(B)$$

が成り立つとき, A と B は互いに独立であるという.

定義 2.3

$X_1, \ldots, X_n$ を $(\Omega, \mathcal{B}, \mathsf{P})$ 上の確率変数とする. 任意の区間 $I_1 = (a_1, b_1], \ldots, I_n = (a_n, b_n]$ に対して, n 個の事象

$$\{\omega;\ X_1(\omega) \in I_1\}, \ldots, \{\omega;\ X_n(\omega) \in I_n\}$$

が互いに独立であるとき, $X_1, \ldots, X_n$ は互いに独立であるという.
ただし, $-\infty \leq a_k < b_k < \infty \ (k = 1, \ldots, n)$

注 2.8

任意の区間 $I_1 = (a_1, b_1], \ldots, I_n = (a_n, b_n]$ に対して, n 個の事象 $\{\omega;\ X_1(\omega) \in I_1\}, \ldots, \{\omega;\ X_n(\omega) \in I_n\}$ が互いに独立であれば, 任意のボレル集合 $B_1, \ldots, B_n$ に対して, n 個の事象 $\{\omega;\ X_1(\omega) \in B_1\}, \ldots, \{\omega;\ X_n(\omega) \in B_n\}$ が互いに独立であることが, 確率測度の拡張定理を用いて示せる. この逆は明らかである. このことから, 区間の代わりにボレル集合を用いて確率変数の独立性を定義してもよい.

定理 2.7

$X_1, \ldots, X_n$ の同時分布関数を $F_{X_1,\ldots,X_n}(x_1, \ldots, x_n)$, X_i の周辺分布関数を $F_{X_i}(x_i)$ とする．このとき，$X_1, \ldots, X_n$ が互いに独立であるための必要十分条件は

$$F_{X_1,\ldots,X_n}(x_1, \ldots, x_n) = F_{X_1}(x_1) \cdots F_{X_n}(x_n), \quad {}^\forall x_i \in \mathbb{R},\ i = 1, \ldots, n$$

が成立することである．

(証明は板書で)

メモ用紙

確率変数と分布

メモ用紙

2つの確率ベクトルの独立性

$\mathbb{R}^n$ における任意の半開区間 $A = (a_{11}, a_{21}] \times \cdots \times (a_{1n}, a_{2n}]$ と $\mathbb{R}^m$ における任意の半開区間 $B = (b_{11}, b_{21}] \times \cdots \times (b_{1m}, b_{2m}]$ に対して

$$\mathsf{P}(\boldsymbol{X} \in A, \boldsymbol{Y} \in B) = \mathsf{P}(\boldsymbol{X} \in A)\mathsf{P}(\boldsymbol{Y} \in B)$$

を満たすとき $\boldsymbol{X}$ と $\boldsymbol{Y}$ は独立であるという.

2.5.1. 離散型・連続型分布

離散型分布と確率関数

確率変数 X のとりうる値が, 有限個または可算無限個の値をとるとき, 離散型 (discrete type) 確率変数であるといい, その分布を離散型分布という.

離散型分布は

$$f(x) = \mathsf{P}(X = x) = \mathsf{P}(\{\omega;\ X(\omega) = x\}), \quad x \in \mathbb{R}$$

によって決定される. $f(x)$ を確率関数 (probability function) あるいは連続型の場合と同様に確率密度関数 (probability density function), pdf という.

確率関数の性質

X のとりうる値の集合を $D = \{x_j;\ j = 1, 2, \ldots\}$ とすると

(1) $f(x_j) \geq 0,\ j = 1, 2, \ldots$.

(2) $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} f(x_j) = 1.$

離散型確率変数の場合には, とりうる値の集合 D 上における確率が問題になる. 確率関数は多くの場合 D 上に制限して

$$f(x) = \mathsf{P}(X = x) = \mathsf{P}(\{\omega;\ X(\omega) = x\}),\ x \in D$$

と表される.
分布関数は

$$F(x) = \sum_{x_j \leq x} f(x_j)$$

と表せる.

離散型分布の例

2 項分布 (Binomial distribution)
確率関数が

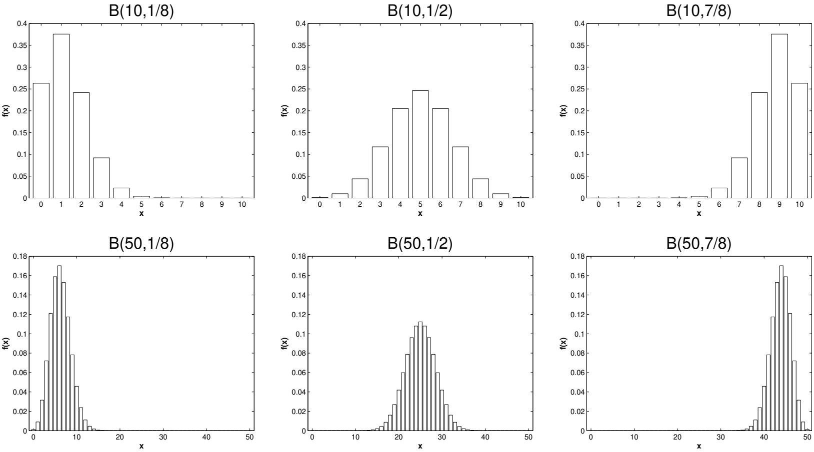
$$f(x) = \mathsf{P}(X = x) = {}_nC_x\theta^x(1-\theta)^{n-x}, \quad x = 0, 1, \ldots, n$$

で与えられる分布をパラメータ n, $\theta \in [0, 1]$ の 2 項分布といい, $B(n, \theta)$ で表す.

$D = \{0, 1, \ldots, n\}$ とおくと

$$\mathsf{P}(X \in D) = \sum_{x=0}^{n} \mathsf{P}(X = x) = \{\theta + (1-\theta)\}^n = 1 \text{ (2 項定理)}$$

2 項分布の確率関数



ポアソン分布 (Poisson distribution)
確率関数が

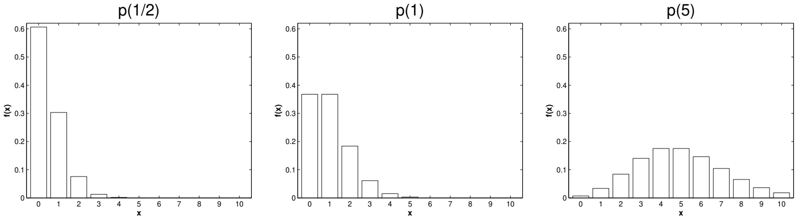
$$f(x) = \mathsf{P}(X = x) = \frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda}, \quad x = 0, 1, \ldots$$

で与えられる分布をパラメータ $\lambda > 0$ のポアソン分布といい, $p(\lambda)$ で表す.

$D = \{0, 1, \ldots\}$ とおくと

$$\mathsf{P}(X \in D) = \sum_{x=0}^{\infty} \mathsf{P}(X = x) = e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = 1.$$

ポアソン分布の確率関数



ベルヌーイ試行 (1/2)

成功率 p, 反復回数 n のベルヌーイ試行 (Bernoulli trial) とは, 次の条件 (1), (2), (3) をみたす n 回の繰り返し試行のことである.

(1) 各回の試行の結果は, A か A^c のどちらか一方しか起きない.

(2) 各回の試行の結果は, 他の試行の結果と互いに独立である.

(3) 事象 A が起こる確率 $(= p)$ は毎回不変である.

事象 A を成功, 事象 A^c を失敗ともいう. また, このような試行の繰り返し試行を, ベルヌーイ試行列という.

ベルヌーイ試行 (2/2)

ある特定の事象 A の生起に着目する試行を繰り返す試行において，第 i 回目の試行結果を表す確率変数 X_i を，

A が起これば 1 をとり，A^c が起これば 0 をとるものとして定義する．

このとき，成功率 p，反復回数 n のベルヌーイ試行は，次の (1)，(2) をみたす確率変数列 $X_1, \ldots, X_n$ とみなすことができる．

(1) $\mathsf{P}(X_i = 1) = p,\ \mathsf{P}(X_i = 0) = 1 - p,\ i = 1, \ldots, n.$

(2) 確率変数列 $X_1, \ldots, X_n$ は互いに独立である．

このような確率変数列を
成功率 p，反復回数 n のベルヌーイ確率変数列という．

定理 2.8

確率変数列 $X_1, \ldots, X_n$ を成功率 p, 反復回数 n のベルヌーイ確率変数列とし, 成功の回数

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n$$

を考える. このとき, 次が成り立つ.

(1) 確率変数 S_n は 2 項分布 $B(n, p)$ に従う.

(2) 確率変数 S_n は 2 項分布 $B(n, p_n)$, $p_n = \lambda/n$ に従うとする. このとき

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}(S_n = k) = p(k;\lambda), \ \ k = 0, 1, \ldots$$

ここで, $p(k;\lambda)$ はパラメータ λ のポアソン分布の確率関数である.

(証明は板書で)

メモ用紙

メモ用紙

その他の離散型分布

幾何分布 (Geometric distribution)

$$f(x) = \mathsf{P}(X = x) = p(1-p)^x,\ x = 0, 1, 2, \ldots$$

パラメータ p $(\in (0,1))$ の**幾何分布**といい, $G(p)$ と表す.

負の 2 項分布 (Negative binomial distribution)

$$f(x) = \mathsf{P}(X = x) = {}_{x+r-1}C_{r-1} p^r (1-p)^x,\ x = 0, 1, 2, \ldots$$

パラメータ r, p $(\in (0,1))$ の**負の 2 項分布**といい, $NB(r,p)$ と表す.

超幾何分布 (Hypergeometric distribution)

$$f(x) = \mathsf{P}(X = x) = \frac{{}_M C_x \, {}_{N-M} C_{n-x}}{{}_N C_n}$$

x は非負の整数で, $\max\{0, n-(N-M)\} \le x \le \min\{n, M\}$.

パラメータ N, M, n の**超幾何分布**といい, $HG(N,M,n)$ と表す.

連続型分布と確率密度関数

身長, 温度, バスの待ち時間などのように X の取り得る値が連続する値となる場合で, とくに X の分布関数が

$$\mathsf{P}(X \leq x) = F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt,\ x \in \mathbb{R}$$

と表されるとき, 連続型確率変数 (Continuous type random variable) といい, その確率分布を連続型分布という.
$\mathbb{R}$ 上の関数 $f(x)$ を確率密度関数 (Probability density function, pdf) という.

注. 分布関数 $F(x)$ が連続であるが, 連続型でない分布もある.

確率密度関数の性質

$$\mathsf{P}(a < X \le b) = \int_a^b f(x)dx$$

$f(x)$ の連続点で

$$\frac{d}{dx}F(x) = f(x)$$

(1) $f(x) \ge 0, \quad {}^{\forall}x \in \mathbb{R}.$

(2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = 1.$

連続型分布の例

一様分布 (Uniform distribution)
確率密度関数が

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & a < x \le b \\ 0, & \text{その他} \end{cases}$$

で与えられる分布を区間 $(a, b]$ 上の一様分布といい, $U(a, b]$ で表す.

定理 2.9

連続型確率変数 X の分布関数 F は, $a < x < b$ において, 狭義単調増加で $F(a) = 0, F(b) = 1$ であるとする ($a = -\infty$ あるいは $b = \infty$ でもよい). このとき, 確率変数 $Y = F(X)$ は一様分布 $(0, 1]$ に従う. 逆に, Y が一様分布 $(0, 1]$ に従うとする. このとき, $X = F^{-1}(Y)$ の分布関数は F となる.

(証明は板書で)

メモ用紙

正規分布 (Normal distribution)
確率密度関数が

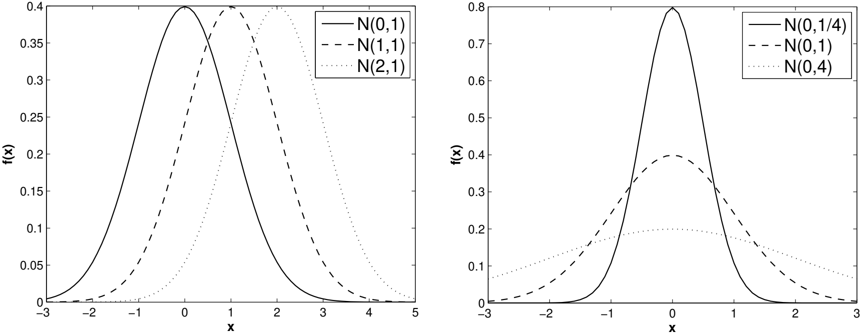
$$f(x;\ \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right\}$$

で与えられる分布を平均 μ, 分散 σ^2 の正規分布といい, $N(\mu, \sigma^2)$ で表す. ここで, $-\infty < \mu < \infty, \sigma^2 > 0$.

$N(0,1)$ を標準正規分布 (Standard normal distribution) という.
$N(0,1)$ の pdf は

$$\phi(x) = f(x;\ 0, 1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)$$

正規分布の確率密度関数



その他の連続型分布

指数分布 (Exponential distribution)
確率密度関数が

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

で与えられる分布を指数分布といい，*Ex*(λ) で表す．ここで，λ は正の実数である．

ガンマ分布 (Gamma distribution)
確率密度関数が

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(r)} \lambda^r e^{-\lambda x} x^{r-1}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

で与えられる分布をガンマ分布といい，*Ga*(r, λ) で表す．ここで，r, λ は正の実数である．

2.5.2. 2次元の場合

2 次元離散型分布と連続型分布

2 次元確率変数 (X,Y) の取り得る値の集合 D が, $\mathbb{R}^2$ の高々可算集合であるとき, (X,Y) は 離散型確率変数, また, (X,Y) の分布を離散型分布という.

離散型分布は, 確率関数

$$f(x,y) = \mathrm{P}(X = x, Y = y), \ \ (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

によって決定される.

2 次元確率変数 (X,Y) 分布関数が

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(s,t) ds dt$$

と表されるとき,(X,Y) は 連続型確率変数, また, (X,Y) の分布を連続型分布という.
$f(x,y)$ を (X,Y) または, (X,Y) の分布の確率密度関数という.

2 次元確率関数と確率密度関数の性質

- 確率関数 (離散型)
  X の取り得る値を $x_1, x_2, \ldots,$
  Y の取り得る値を $y_1, y_2, \ldots$ とすると
  (1) $f(x_i, y_j) \geq 0,\ i, j = 1, 2, \ldots$ (2) $\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} f(x_i, y_j) = 1$
  同時分布関数：$F(x, y) = \sum_{x_i \leq x} \sum_{y_j \leq y} f(x_i, y_j)$
- 確率密度関数 (連続型)
  (1) $f(x, y) \geq 0,\ ^{\forall}(x, y) \in \mathbb{R}^2$ (2) $\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dx dy = 1$
  同時分布関数：$F(x, y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(s, t) ds dt$
  $\left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F(x, y) = f(x, y) \right)$

3 項分布

1 回の試行で事象 A, B, C のいずれかが起こりうる.
A が起こる確率を p_1, B が起こる確率を p_2 とする.
事象 C が起こる確率は, $1 - p_1 - p_2$ である.

n 回の独立な試行で, A が起こる回数を X, B が起こる回数を Y とすれば

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \mathsf{P}(X = x, Y = y) \\ &= \frac{n!}{x!y!(n-x-y)!} p_1^x p_2^y (1 - p_1 - p_2)^{n-x-y} \\ &\quad ((x, y) \in D;\ 0 \le p_1,\ 0 \le p_2,\ p_1 + p_2 \le 1) \end{aligned}$$

ただし, $D = \{(x, y);\ x, y$ は非負整数$, x + y \le n\}$.
このような分布を, パラメータ $n, (p_1, p_2)$ をもつ3 項分布といい,
$M_3(n, (p_1, p_2))$ と表す.

2 次元正規分布

(X, Y) の確率密度関数が

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left\{\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right) + \left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right\}\right]$$

$$\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R},\ \sigma_1^2 > 0, \sigma_2^2 > 0,\ -1 < \rho < 1$$

で表されるとき, 2 次元正規分布という.

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}, \quad \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$$

とおくと

$$f(x,y) = (2\pi)^{-1}|\Sigma|^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})'\Sigma^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})\right\}$$

と表せるので, (X, Y) の分布を $N_2(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$ と表す.

周辺分布

- (X, Y) が離散型で，その確率関数を $f(x_i, y_j)$, $i, j = 1, 2, \ldots$ とすると，X は離散型で，その確率関数は

$$f_X(x_i) = \mathsf{P}(X = x_i, Y \in D_y) = \sum_{y_j \in D_y} f(x_i, y_j),$$

$$D_y = \{y_1, y_2, \ldots\}$$

- (X, Y) が連続型で，分布関数を $F(x, y)$，確率密度関数を $f(x, y)$ とすると，X は連続型で，確率密度関数は

$$F(x, \infty) = \int_{-\infty}^{x} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(s, t)dt \right\} ds \text{ より}$$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, t)dt$$

定理 2.10

(1) (X, Y) が 3 項分布 $M_3(n, (p_1, p_2))$ に従うとする．このとき，
X, Y はそれぞれ 2 項分布 $B(n, p_1)$, $B(n, p_2)$ に従う．

(2) (X, Y) が 2 次元正規分布 $N_2(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$ に従うとする．このとき，
X, Y はそれぞれ正規分布 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ に従う．

(証明は板書で)

メモ用紙

メモ用紙

確率変数と分布

メモ用紙

定理 2.11

(X, Y) は離散型あるいは連続型.
$f_{X,Y}(x, y)$: 同時確率密度関数
$f_X(x)$, $f_Y(y)$: および周辺確率密度関数

$\Rightarrow$ X と Y が独立であることと

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y), \quad (x,y) \in D = \{(x,y);\ f_{X,Y}(x,y) > 0\}$$

が成り立つことは同値である.

(証明は板書で)

メモ用紙

メモ用紙