定理 2.1 X を Ω 上の実数値関数とする. 次の条件 (1), (2) は同値である.

(1) X が $(\Omega, \mathcal{B})$ 上の確率変数である.

(2) 任意の $A \in \mathbb{B}_1$ に対して

$$X^{-1}(A) = \{\omega;\ X(\omega) \in A\} \in \mathcal{B}.$$

(1)⇒(2) の証明の手順

(i) $\mathbb{A} = \{A \in \mathbb{B}_1;\ X^{-1}(A) \in \mathcal{B}\}$
が $\mathbb{R}$ 上の σ-集合体であることを示す.

(ii) $J_1 = \{(a, b];\ -\infty < a < b < \infty\} \subset \mathbb{A}$
を示す.

(iii) (i), (ii) と $\mathbb{B}_1$ が J_1 を (部分集合族として) 含む最小の σ-集合体であることから $\mathbb{B}_1 \subset \mathbb{A}$ となる

(iv) (iii) より $A \in \mathbb{B}_1$ ならば $A \in \mathbb{A}$ であるから $X^{-1}(A) \in \mathcal{B}$ が成り立つ.

(i) の証明

(B1) $X^{-1}(\mathbb{R}) = \Omega \in \mathcal{B}$ ($\because$ $\mathcal{B}$ が σ-集合体であるから)
したがって $\mathbb{R} \in \mathbb{A}$

(B2) $A \in \mathbb{A}$ とすると $X^{-1}(A) \in \mathcal{B}$ である.
このとき, 逆像の性質から $X^{-1}(A^c) = (X^{-1}(A))^c \in \mathcal{B}$ となる. ($\because$ $\mathcal{B}$ が σ-集合体であるから)
したがって $A^c \in \mathbb{A}$

(B3) $A_n \in (\mathbb{A})$ $(n \in \mathbb{N})$ とすると, $X^{-1}(A_n) \in \mathcal{B}$ $(n \in \mathbb{N})$ である.
このとき, 逆像の性質から $X^{-1}(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty}(X^{-1}(A_n)) \in \mathcal{B}$ となる.
($\because$ $\mathcal{B}$ が σ-集合体であるから)
したがって $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathbb{A}$

(ii) の証明
(1) より任意の a, b $(-\infty < a < b < \infty)$ に対して $(-\infty, a], (-\infty, b] \in \mathbb{A}$ である.
このとき, $(a, b] = (-\infty, b] \cap (-\infty, a]^c \in \mathbb{A}$ ($\because$ $\mathbb{A}$ が σ-集合体であるから)
したがって, $J_1 \subset \mathbb{A}$