確率・統計Ａ　期末予備試験

2018.8.5

注意. カンニングその他の不正行為を行わないこと．不正行為を行った場合には, 今年度前期に履修した専門科目 (教職科目を含む) の成績がすべて不可となります.

問題１ X, Y は独立に指数分布 $Ex(\lambda)$ に従う確率変数とする.

(1) $Ex(\lambda)$ の特性関数を求めよ.

(2) 特性関数を利用して, X の平均と分散を求めよ.

(3) $W = X + Y, Z = X$ とおく．(Z, W) の同時確率密度関数を求めよ.

(4) $w > 0$ とする．$X + Y = w$ が与えられたときの X の条件つき分布の確率密度関数を求めよ.

ただし, $Ex(\lambda)$ は１次元連続型分布で, その確率密度関数は

$$f(x;\lambda) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ \quad 0 \quad , & x < 0 \end{cases}$$

問題２ X, Y は独立で, それぞれ負の２項分布 $NB(r, p)$, $NB(q, p)$ に従う確率変数とする．ただし, r, q は自然数, p は $0 < p < 1$ を満す実数である.

(1) $NB(q, p)$ の特性関数を求めよ．ただし, 任意の複素数 z に対して $|z| < 1$ ならば

$$\sum_{k=0}^{\infty} {}_{k+r-1}C_{r-1} z^k = (1-z)^{-r}$$

であることを証明なしに用いてよい.

(2) $X + Y \sim NB(q + r, p)$ であることを示せ.

ただし, $NB(r, p)$ は非負の整数値のみをとる離散型確率分布で, その確率関数は

$$f(x; r, p) = {}_{x+r-1}C_{r-1}\, p^r (1-p)^x,\ x = 0, 1, \cdots$$

である.

問題３ $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ は n 次元確率ベクトルで,

$$\mathrm{E}(X_i) = 0,\ \mathrm{Var}(X_i) = 1\ (i = 1, 2, \ldots, n),$$
$$\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = r\ (i \neq j;\, i, j = 1, 2, \ldots, n)$$

を満す．$Z_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$ とおく.

(1) Z_n の分散 $\mathrm{Var}(Z_n)$ を n, r を用いて表せ.

(2) チェビシェフの不等式を用いて, $r = 0$ ならば

$$^{\forall}\varepsilon > 0,\ \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(|Z_n| > \varepsilon) = 0$$

であることを示せ.

解答１ (1)

$$\varphi_X(t) = \mathrm{E}(e^{itX}) = \int_0^\infty \lambda e^{(it-\lambda)x}dx = \left[\frac{\lambda}{it-\lambda}e^{(it-\lambda)x}\right]_0^\infty = \frac{\lambda}{\lambda - it}$$

(別解) 実部と虚部にわけて積分するときは, $\displaystyle\int_0^\infty \cos(tx)e^{-\lambda x}dx$, $\displaystyle\int_0^\infty \sin(tx)e^{-\lambda x}dx$ を計算することになる.

$$C(t) := \int_0^\infty \cos(tx)e^{-\lambda x}dx, \quad S(t) := \int_0^\infty \sin(tx)e^{-\lambda x}dx \quad \text{とする}$$

$$C(t) = \left[-\frac{1}{\lambda}\cos(tx)e^{-\lambda x}\right]_0^\infty - \frac{t}{\lambda}\int_0^\infty \sin(tx)e^{-\lambda x}dx = \frac{1}{\lambda} - \frac{t}{\lambda}S(t)$$

$$S(t) = \left[-\frac{1}{\lambda}\sin(tx)e^{-\lambda x}\right]_0^\infty + \frac{t}{\lambda}\int_0^\infty \cos(tx)e^{-\lambda x}dx = \frac{t}{\lambda}C(t) \quad \text{より}$$

$$C(t) = \frac{1}{\lambda} - \frac{t^2}{\lambda^2}C(t)$$

$$\Rightarrow \quad C(t) = \frac{1}{\lambda\left(1+\frac{t^2}{\lambda^2}\right)} = \frac{\lambda}{\lambda^2+t^2}, \quad S(t) = \frac{t}{\lambda}C(t) = \frac{t}{\lambda^2+t^2}$$

$$\varphi_X(t) = \lambda\left\{C(t) + iS(t)\right\} = \frac{\lambda(\lambda+it)}{\lambda^2+t^2}$$

最初の解答に疑問を感じる人は $\dfrac{\lambda}{it-\lambda}e^{(it-\lambda)x}$ の実部と虚部が, $\lambda e^{(it-\lambda)x}$ の実部と虚部それぞれの原始関数になっていることを確かめてください.

(2)

$$\varphi'_X(t) = \frac{i\lambda}{(\lambda-it)^2}, \quad \varphi''_X(t) = \frac{2i^2\lambda}{(\lambda-it)^3}$$

$$\mathrm{E}(X) = \frac{1}{i}\varphi'_X(0) = \frac{1}{\lambda}, \quad \mathrm{E}(X^2) = \frac{1}{i^2}\varphi''_X(0) = \frac{2}{\lambda^2}, \quad \mathrm{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

(3)

$$\begin{cases} w = x+y \\ z = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = w - z \end{cases}$$

$$x>0, y>0 \quad \Leftrightarrow \quad w>0, 0<z<w$$

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad |\det(J)| = 1$$

(X,Y) の同時確率密度関数は $x>0, y>0$ で $f_{(X,Y)}(x,y) = \lambda^2 e^{-\lambda(x+y)}$ であるから $w>0, 0<z<w$ で

$$f_{(Z,W)}(z,w) = f_{(X,Y)}(z, w-z)|\det(J)| = \lambda^2 e^{-\lambda w}$$

$w>0, 0<z<w$ 以外では, $f_{(Z,W)}(z,w) = 0$.

(4) $W = X+Y$ の周辺確率密度関数は, $0<w$ で

$$f_W(w) = \int_0^w \lambda^2 e^{-\lambda w}dz = \lambda^2 e^{-\lambda w}w$$

であるから

$$f_{X|X+Y}(x|w) = \frac{f_{(Z,W)}(x,w)}{f_W(w)} = \begin{cases} \dfrac{1}{w} & 0 < x < w \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

解答 2 (1)

$$\mathrm{E}(e^{itX}) = \sum_{x=0}^{\infty} {}_{x+r-1}C_{r-1}\, e^{-it} p^r (1-p)^x = \sum_{x=0}^{\infty} {}_{x+r-1}C_{r-1}\, p^r \{e^{it}(1-p)\}^x$$
$$= \frac{p^r}{\{1-e^{it}(1-p)\}^r}$$

(2) X と Y の独立性より, $X+Y$ の特性関数は

$$\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t)\varphi_Y(t) = \frac{p^r}{\{1-e^{it}(1-p)\}^r}\frac{p^q}{\{1-e^{it}(1-p)\}^q} = \frac{p^{r+q}}{\{1-e^{it}(1-p)\}^{r+q}}$$

となり, *NB(r+q,p)* の特性関数であるから一意性定理より従う.

解答 3 (1) 共分散は内積と同じ性質 (定理 3.9) を持つので

$$\mathrm{Var}\left\{\sum_{i=1}^n X_i\right\} = \mathrm{Cov}\left\{\sum_{i=1}^n X_i, \sum_{j=1}^n X_j\right\} = \sum_{i=1}^n \mathrm{Cov}\left\{X_i, \sum_{j=1}^n X_j\right\}$$
$$= \sum_{i=1}^n \mathrm{Var}(X_i) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1(j\neq i)}^n \mathrm{Cov}(X_i, X_j) = n + n(n-1)r$$
$$\mathrm{Var} Z_n = \frac{1}{n^2}\mathrm{Var}\left\{\sum_{i=1}^n X_i\right\} = \frac{1+(n-1)r}{n}$$

(別解)

$$\mathrm{E}(Z_n) = \mathrm{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mathrm{E}(X_i) = 0 \text{ より}$$
$$\mathrm{Var}(Z_n) = \mathrm{E}(Z_n^2) = \mathrm{E}\left[\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n X_iX_j\right] = \frac{1}{n^2}\mathrm{E}\left[\sum_{i=1}^n X_i^2 + \sum_{i\neq j}^n X_iX_j\right]$$
$$= \frac{1}{n^2}\left\{\sum_{i=1}^n \mathrm{E}(X_i^2) + \sum_{i\neq j}^n \mathrm{E}(X_iX_j)\right\} = \frac{1}{n^2}\{n + n(n-1)r\} = \frac{1+(n-1)r}{n}$$

(2) $r=0$ のとき, $\mathrm{Var}(Z_n) = \dfrac{1}{n}$. チェビシェフの不等式より

$$0 \le \mathrm{P}(|Z_n| > \varepsilon) \le \frac{\mathrm{Var}(Z_n)}{\varepsilon^2} = \frac{1}{n\varepsilon^2} \to 0 \ (n \to \infty)$$

であるから, 挟みうちの原理より $\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(|Z_n| > \varepsilon) = 0$