確率・統計Ａ　予備試験

2019.8.2

問題１ (X, Y) を３項分布 $M_3(n, (p, q))$ に従う２次元確率変数とする．すなわち，X, Y は非負の整数値のみをとる離散型確率変数で，同時確率関数は次式で与えられる．ただし，n は自然数とし，p, q は $p + q < 1$ を満たす正の実数とする．

$$f(x, y; n, p, q) = \frac{n!}{x!y!(n-x-y)!}p^x q^y (1-p-q)^{n-x-y}$$
$$(x = 0, 1, \ldots, n;\ y = 0, 1, \ldots, n;\ x + y \leq n)$$

(1) Y の周辺分布が２項分布となることを示せ．

(2) y を０以上 n 以下の整数値とする．$Y = y$ が与えらえたときの X の条件つき分布が２項分布であることを示せ．

(3) (X, Y) の特性関数を求めよ．

(4) 特性関数を利用して，$\mathrm{Cov}(X, Y)$ を求めよ．

(5) $X + Y$ の分布が２項分布となることを示せ．

２項分布 $B(n, p)$ の確率関数は

$$g(x; n, p) = \frac{n!}{x!(n-x)!}p^x(1-p)^{n-x},\ (x = 0, 1, 2, \ldots, n;\ 0 \leq p \leq 1)$$

である．

問題２ (X, Y) は次式で与えられる確率密度関数をもつ２次元連続型確率変数である．

$$f(x, y) = \begin{cases} C & \left(-1 \leq x \leq 1;\ -1 + \dfrac{x}{2} \leq y \leq 1 + \dfrac{x}{2}\right) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

ただし，C は定数である．

(1) C の値を求めよ．

(2) $\mathrm{Cov}(X, Y)$ を 求めよ．

(3) a を定数として，$Z = X, W = aX + Y$ とおく．(Z, W) の確率密度関数 $f_{(Z,W)}(z, w)$ を求めよ．($f_{(Z,W)}(z, w) > 0$ となる範囲を明示すること.)

(4) Z, W を (3) で定義した確率変数とする．$\mathrm{Cov}(Z, W) = 0$ となるような a の値を求めよ．このとき，Z と W は独立であることを示せ．

解答１ (1)

$$
\begin{aligned}
f_Y(y) &= \sum_{x=0}^{n} f(x,y;n,p,q) = \frac{n!}{y!(n-y)!} q^y \sum_{x=0}^{n-y} \frac{(n-y)!}{x!(n-y-x)!} p^x (1-p-q)^{n-y-x} \\
&= \frac{n!}{y!(n-y)!} q^y \{p + (1-p-q)\}^{n-y} = \frac{n!}{y!(n-y)!} q^y (1-q)^{n-y}
\end{aligned}
$$

より, $Y \sim B(n,q)$

(2) X の取りうる値は $x = 0,1,\dots,n-y$ である. この x について

$$
\begin{aligned}
f_{X|Y}(x|y) &= \frac{f(x,y;n,p,q)}{f_Y(y)} = \frac{\frac{n!}{x!y!(n-x-y)!} p^x q^y (1-p-q)^{n-x-y}}{\frac{n!}{y!(n-y)!} q^y (1-q)^{n-y}} \\
&= \frac{(n-y)!}{x!(n-y-x)!} \Big(\frac{p}{1-q}\Big)^x \Big\{1 - \Big(\frac{p}{1-q}\Big)\Big\}^{n-y-x}
\end{aligned}
$$

より, $Y = y$ が与えられたときの X の条件つき分布は $B\Big(n-y, \dfrac{p}{1-q}\Big)$.

(3)

$$
\begin{aligned}
\varphi_{(X,Y)}(s,t) &= \sum_{x=0}^{n} \sum_{y=0}^{n-x} e^{isx} e^{ity} \frac{n!}{x!y!(n-x-y)!} p^x q^y (1-p-q)^{n-x-y} \\
&= \sum_{x=0}^{n} \sum_{y=0}^{n-x} \frac{n!}{x!(n-x)!} \frac{(n-x)!}{y!(n-x-y)!} (e^{is}p)^x (e^{it}q)^y (1-p-q)^{n-x-y} \\
&= \sum_{x=0}^{n} \frac{n!}{x!(n-x)!} (e^{is}p)^x \big\{e^{it}q + (1-p-q)\big\}^{n-x} \\
&= \big\{e^{is}p + e^{it}q + (1-p-q)\big\}^n
\end{aligned}
$$

(4)

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \varphi_{(X,Y)}(s,t)}{\partial s} = n\big\{e^{is}p + e^{ity}q + (1-p-q)\big\}^{n-1} p e^{is} i, \quad \frac{\partial \varphi_{(X,Y)}(0,0)}{\partial s} = npi \\
&\frac{\partial \varphi_{(X,Y)}(s,t)}{\partial t} = n\big\{e^{is}p + e^{ity}q + (1-p-q)\big\}^{n-1} q e^{it} i, \quad \frac{\partial \varphi_{(X,Y)}(0,0)}{\partial t} = nqi \\
&\frac{\partial^2 \varphi_{(X,Y)}(s,t)}{\partial s \partial t} = n(n-1)\big\{e^{is}p + e^{ity}q + (1-p-q)\big\}^{n-2} p e^{is} i q e^{it} i, \\
&\frac{\partial^2 \varphi_{(X,Y)}(0,0)}{\partial s \partial t} = n(n-1)pqi^2 \\
&\mathrm{E}(X) = np, \mathrm{E}(Y) = nq, \mathrm{E}(XY) = n(n-1)pq, \\
&\mathrm{Cov}(X,Y) = n(n-1)pq - n^2pq = -npq
\end{aligned}
$$

(5)

$$
\varphi_Y(t) = \varphi_{(X,Y)}(0,t) = \{e^{it}q + 1 - q\}^n
$$

より $B(n,q)$ の特性関数は $\{e^{it}q + 1 - q\}^n$

$$
\varphi_{X+Y}(t) = \mathrm{E}[e^{itX+itY}] = \varphi_{(X,Y)}(t,t) = [e^{it}(p+q) + \{1 - (p+q)\}]^n
$$

これは, $B(p+q,n)$ の特性関数なので, $X + Y \sim B(p+q,n)$.

解答 2 (1)

$$1=\int_{-1}^{1}\left\{\int_{-1+x/2}^{1+x/2}Cdy\right\}dx=4C$$

より $C=\dfrac{1}{4}$.

(2)

$$\begin{aligned}
&\mathrm{E}(X)=\frac{1}{4}\int_{-1}^{1}x\left\{\int_{-1+x/2}^{1+x/2}dy\right\}dx=\frac{1}{4}\int_{-1}^{1}2xdx=0\\
&\mathrm{E}(Y)=\frac{1}{4}\int_{-1}^{1}\left\{\int_{-1+x/2}^{1+x/2}ydy\right\}dx=\frac{1}{4}\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{x}{2}+1\right)^2-\left(\frac{x}{2}-1\right)^2\right\}dx\\
&\quad=\frac{1}{4}\int_{-1}^{1}xdx=0\\
&\mathrm{E}(XY)=\frac{1}{4}\int_{-1}^{1}x\left\{\int_{-1+x/2}^{1+x/2}ydy\right\}dx=\frac{1}{4}\int_{-1}^{1}x^2dx=\frac{1}{6}\\
&\mathrm{Cov}(X,Y)=\frac{1}{6}-0^2=\frac{1}{6}
\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{cases}z=x\\ w=ax+y\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}x=z\\ y=w-az\end{cases}$$

$$-1\le x\le 1,\ -1+\frac{x}{2}\le y\le 1+\frac{x}{2}$$

$$\Leftrightarrow\quad -1\le z\le 1,\ -1+\frac{1+2a}{2}z\le w\le 1+\frac{1+2a}{2}z$$

ヤコビアンは 1 であるから

$$f_{(Z,W)}(z,w)=\begin{cases}\dfrac{1}{4} & \left(-1\le z\le 1,\ -1+\dfrac{1+2a}{2}z\le w\le 1+\dfrac{1+2a}{2}z\right)\\ 0 & (\text{その他})\end{cases}$$

(4)

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Var}(X)=\frac{1}{4}\int_{-1}^{1}x^2\left\{\int_{-1+x/2}^{1+x/2}dy\right\}dx=\frac{1}{4}\int_{-1}^{1}2x^2=\frac{1}{3}\\
&\mathrm{Cov}(Z,W)=a\mathrm{Var}(X)+\mathrm{Cov}(X,Y)=\frac{a}{3}+\frac{1}{6}=0\quad\Rightarrow\quad a=-\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

$$f_{(Z,W)}(z,w)=\begin{cases}\dfrac{1}{4} & (-1\le z\le 1,\ -1\le w\le 1)\\ 0 & (\text{その他})\end{cases}$$

$$f_Z(z)=\frac{1}{4}\int_{-1}^{1}dw=\frac{1}{2}\ (-1\le z\le 1),\ f_W(w)=\frac{1}{4}\int_{-1}^{1}dz=\frac{1}{2}\ (-1\le w\le 1)$$

より $f_{(Z,W)}(z,w)=f_Z(z)f_W(w)$ となるから独立である.