演習問題の略解

4.1-1.

$X \sim B(n,p)$ **２項分布**

$$\varphi_X(t) = \sum_{k=0}^{n} e^{itk} \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} \left(e^{it}p\right)^k (1-p)^{n-k} = \left\{e^{it}p + (1-p)\right\}^n$$

$X \sim P(\lambda)$ **ポアッソン分布**

$$\varphi_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{itk} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \left(e^{it}\lambda\right)^k \frac{1}{k!} = e^{-\lambda} \exp\left(e^{it}\lambda\right)$$

$X \sim U(0,1)$ **一様分布**

$t \neq 0$ のとき

$$\varphi_X(t) = \int_0^1 e^{itx} dx = \int_0^1 \cos(tx) dx + i \int_0^1 \sin(tx) dx = \frac{1}{t} \sin t - \frac{i}{t}(\cos t - 1)$$
$$= \frac{1}{it}(e^{it} - 1)$$

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ **正規分布**

$Y = \frac{X-\mu}{\sigma}$ とおくと，$Y \sim N(0,1)$ となる．$X = \mu + \sigma Y$ より

$$\varphi_X(t) = \mathrm{E}[e^{it(\mu+\sigma Y)}] = e^{it\mu}\mathrm{E}[e^{i(t\sigma)Y}] = e^{it\mu}\varphi_Y(\sigma t)$$

Y の特性関数は

$$\varphi_Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{itx} e^{-x^2/2} dx$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \cos(tx) e^{-x^2/2} dx + \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \sin(tx) e^{-x^2/2} dx$$

奇関数だから，$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \sin(tx) e^{-x^2/2} dx = 0.$

$I(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \cos(tx) e^{-x^2/2} dx$ とおくと，

$$\frac{d}{dt} I(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial t} \cos(tx) e^{-x^2/2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \sin(tx)(-x) e^{-x^2/2} dx$$
$$= [\sin(tx) e^{-x^2/2}]_{-\infty}^{\infty} - t \int_{-\infty}^{\infty} \cos(tx) e^{-x^2/2} dx = -tI(t)$$

微分方程式をとく，$I(0) = 1$ をみたす解は，$I(t) = e^{-t^2/2}$.

4.1-2.

(1)

$$\begin{aligned}\varphi_{(X,Y)}(t_1,t_2) &= \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{n-j} e^{i(jt_1+kt_2)}\frac{n!}{j!k!(n-j-k)!}p^j q^k (1-p-q)^{n-j-k} \\ &= \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{n-j}\frac{n!}{j!k!(n-j-k)!}\left(pe^{it_1}\right)^j\left(qe^{it_2}\right)^k(1-p-q)^{n-j-k} \\ &= (pe^{it_1}+qe^{it_2}+1-p-q)^n\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[XY] &= -\frac{\partial^2}{\partial t_1\partial t_2}\varphi_{(X,Y)}(0,0) \\ &= -n(n-1)(pe^{it_1}+qe^{it_2}+1-p-q)^{n-2}pie^{it_1}qie^{it_2}|_{t_1=0,t_2=0} \\ &= n(n-1)pq\end{aligned}$$

4.2-1. (1) $\varphi_{X_1}(t)=\{e^{it}p+(1-p)\}^m,\ \varphi_{X_2}(t)=\{e^{it}p+(1-p)\}^n$ より

$$\varphi_{X_1+X_2}(t)=\{e^{it}p+(1-p)\}^m\{e^{it}p+(1-p)\}^n=\{e^{it}p+(1-p)\}^{m+n}$$

(2) $\varphi_{X_1}(t)=\exp\{(e^{it}-1)\lambda_1\},\ \varphi_{X_2}(t)=\exp\{(e^{it}-1)\lambda_2\}$ より

$$\varphi_{X_1+X_2}(t)=\exp\{(e^{it}-1)\lambda_1\}\exp\{(e^{it}-1)\lambda_2\}=\exp\{(e^{it}-1)(\lambda_1+\lambda_2)\}$$

(3) $\varphi_{X_1}(t)=\exp\{it\mu_1-t^2\sigma_1^2/2\},\ \varphi_{X_2}(t)=\exp\{it\mu_2-t^2\sigma_1^2/2\}$ より

$$\varphi_{X_1+X_2}(t)=\exp\{it\mu_1-t^2\sigma_1^2/2\}\exp\{it\mu_2-t^2\sigma_2^2/2\}=\exp\{it(\mu_1+\mu_2-t^2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)/2\}$$

4.2-2.

(1)

$$\begin{aligned}\varphi_{(X_1,X_2)}(t_1,t_2) &= (pe^{it_1}+qe^{it_2}+1-p-q)^m \\ \varphi_{(Y_1,Y_2)}(t) &= (pe^{it_1}+qe^{it_2}+1-p-q)^n\end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned}\varphi_{(X_1+Y_1,X_2+Y_2)}(t_1,t_2) &= (pe^{it_1}+qe^{it_2}+1-p-q)^m(pe^{it_1}+qe^{it_2}+1-p-q)^n \\ &= (pe^{it_1}+qe^{it_2}+1-p-q)^{m+n}\end{aligned}$$

(2) $\varphi_{X,Y}(t_1,t_2)=(pe^{it_1}+qe^{it_2}+1-p-q)^n$ より，

$$\varphi_X(t)=\varphi_{X,Y}(t,0)=(pe^{it}+1-p)^n$$

5.1-1

(1) $\mathrm{E}(X_j)=p\ (j=1,\cdots,n)$ なので，大数の法則.

(2) 計算すると $\mathrm{E}(\frac{1}{n}X_n) = p, \mathrm{Var}(nX_n) = \frac{p(p-1)}{n}$ となり，チェビシェフの不等式より任意の正の数 ε に対して

$$\mathrm{P}(|\frac{1}{n}X_n - p| > \varepsilon) \leq \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2} \to 0 \ (n \to \infty)$$

5.1-2

(1) $\mathrm{E}(X_j) = \lambda \ (j = 1, \cdots, n)$ なので，大数の法則.

(2) 計算すると $\mathrm{E}(\frac{1}{n}X_n) = \lambda, \mathrm{Var}(\frac{1}{n}X_n) = \frac{\lambda}{n}$ となり，チェビシェフの不等式より任意の正の数 ε に対して

$$\mathrm{P}(|\frac{1}{n}X_n - \lambda| > \varepsilon) \leq \frac{\lambda}{n\varepsilon^2} \to 0 \ (n \to \infty)$$

5.1-3

(1)

$$\varphi_X(t) = e^{-t^2/2}, \quad \varphi'_X(t) = -te^{-t^2/2}, \quad \varphi''_X(t) = (t^2-1)e^{-t^2/2},$$
$$\varphi_X^{(3)}(t) = -(t^3-3t)e^{-t^2/2}, \quad \varphi_X^{(4)}(t) = (t^4-6t^2+3)e^{-t^2/2}$$

より

$$\mathrm{E}(X) = 0, \ \mathrm{E}(X^2) = 1, \ \mathrm{E}(X^3) = 0, \ \mathrm{E}(X^4) = 3.$$

(2) $\mathrm{E}(Y) = \mathrm{E}(X^2) = 1, \ \mathrm{Var}(Y) = \mathrm{E}\{(X^2-1)^2\} = 2.$

(3) 大数の法則より，$Z_n \to \mathrm{E}(Y) = 1 \ in \ P.$ $c = 1$ である．

5.2-1

(1)

$$\mathrm{P}(V_n > v) = \mathrm{P}(X_1 > v, \cdots, X_n > v) = \prod_{j=1}^{n} \mathrm{P}(X_j > v) = (1-v)^n$$

V_n の分布関数は，$\mathrm{P}(V_n \leq v) = 1 - (1-v)^n.$

(2) $U(0)$ の分布関数は，$v = 0$ 以外の任意の点で連続である．$0 < v \leq 1$ のときは,

$$\lim_{n\to\infty} \{1 - (1-v)^n\} = 1$$

で，$U(0)$ の分布関数の値に収束する．

(3) 実数 $v > 0$ を固定する．n が十分大きいとき，$\frac{v}{n} < 1$ となり,

$$\mathrm{P}(Z_n \leq v) = \mathrm{P}(V_n \leq \frac{v}{n}) = 1 - \left(1 - \frac{v}{n}\right)^n \to 1 - e^{-v} \quad (n \to \infty)$$

したがって，指数分布 $E(1)$ に分布収束する．

5.2-2

(1) $0 \leq x \leq 1$ のとき

$$\mathrm{P}(X_i \leq x) = \int_0^x 2t dt = x^2$$

$$\mathrm{P}(U_n \leq x) = \mathrm{P}(X_1 \leq x, \cdots, X_n \leq x) = \prod_{j=1}^n \mathrm{P}(X_j \leq x) = x^{2n}$$

(2) $U(1)$ の分布関数は，$x = 1$ 以外の任意の点で連続である．$0 \leq x < 1$ のときは,

$$\lim_{n\to\infty} x^{2n} = 0$$

で，$U(1)$ の分布関数の値に収束する.

(3) 実数 $x > 0$ を固定する．n が十分大きいとき，$\frac{x}{n} < 1$ となり,

$$\mathrm{P}(W_n \leq x) = \mathrm{P}\big(1 - \frac{x}{n} \leq U_n\big) = 1 - \big(1 - \frac{x}{n}\big)^{2n} \to 1 - e^{-2x} \quad (n \to \infty)$$

したがって，指数分布 $E(2)$ に分布収束する.

5.3-1 (1) $\mathrm{E}(X_j) = p,\ \mathrm{Var}(X_j) = p(1-p)$ なので，中心極限定理より標準正規分布に分布収束する.

(2) $X_1, \cdots, X_n \sim i.i.d.\ B(1,p)$ のとき，2 項分布の再生性より $X_1 + \cdots + X_n \sim B(n,p)$. したがって，(1) の

$$\sqrt{n}\big(\frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n) - p\big)/\sqrt{p(1-p)}$$

と，(2) の

$$(X_n - np)/\sqrt{np(1-p)}$$

は，同じ分布にしたがい，$n \to \infty$ のとき同じ分布に分布収束する.

5.3-2 (1) $\mathrm{E}(X_j) = \lambda,\ \mathrm{Var}(X_j) = \lambda$ なので，中心極限定理より標準正規分布に分布収束する.

(2) $X_1, \cdots, X_n \sim i.i.d.\ P(\lambda)$ のとき, ポアッソン分布の再生性より $X_1 + \cdots + X_n \sim P(n\lambda)$. したがって，(1) の

$$\sqrt{n}\big(\frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n) - \lambda\big)/\sqrt{\lambda}$$

と，(2) の

$$(X_n - n\lambda)/\sqrt{n\lambda}$$

は，同じ分布にしたがい，$n \to \infty$ のとき同じ分布に分布収束する.