演習問題の略解 5.4 以降

5.5-1.

(1)

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\{(X_j-\mu)+(\mu-\bar{X}_n)\}^2$$
$$= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(X_j-\mu)^2 + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(\mu-\bar{X}_n)^2 + \frac{2}{n}\left\{\sum_{j=1}^{n}(X_j-\mu)\right\}(\mu-\bar{X}_n)$$

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(\mu-\bar{X}_n)^2 = (\mu-\bar{X}_n)^2, \quad \sum_{j=1}^{n}(X_j-\mu) = n(\bar{X}_n-\mu)$$

を用いる.

(2) $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(X_j-\mu)^2$ は大数の法則による．中心極限定理より $\sqrt{\frac{n}{\sigma^2}}(\bar{X}_n-\mu) \xrightarrow{d} Z$, 大数の法則より $\sigma(\bar{X}_n-\mu) \xrightarrow{P} 0$ なので，積をとると，$\sqrt{n}(\bar{X}_n-\mu)^2 \xrightarrow{P} 0$

(3) 中心極限定理を用いる．$(X_j-\mu)^2$ の分散は，特性関数を利用して計算すると $2\sigma^4$.

(4) (3) の左辺と (4) の左辺の差が 0 に確率収束することを示せばよい.

6.1-1.

(1) 確率 θ で 1, 確率 $1-\theta$ で 0 という値を取るから，分布関数は,

$$\mathrm{P}(X \le x) = \begin{cases} 0 & (x<0) \\ 1-\theta & (0 \le x < 1) \\ 1 & (x \ge 1) \end{cases}$$

(2) S は，二項分布 $B(n,\theta)$.

(3) N 個から n 個取りだす取りだし方は，$\frac{N!}{n!(N-n)!}$ 通り．そのうち，$S=k$ となる取りだし方は,

$$0 \le k \le N\theta, \quad 0 \le n-k \le N(1-\theta) \qquad (*)$$

のとき，$\frac{(N\theta)!}{k!(N\theta-k)!}\cdot\frac{\{N(1-\theta)\}!}{(n-k)!\{N(1-\theta)-(n-k)\}!}$ 通り.
k が，$(*)$ を満たさないときは，$\mathrm{P}(X=k)=0$.

(4) 極限は，(2) と同じになる.

5.2-1.

(1) 等式は部分積分で証明する．$\int_0^\infty e^{-x/2}\cos(tx)dx$, $\int_0^\infty e^{-x/2}\sin(tx)dx$, に関する連立一次式をといて，２つの積分値が求められる.
自由度２のカイ二乗分布の特性関数は，$\int_0^\infty \{\cos(tx)+i\sin(tx)\}\frac{1}{2}e^{-x/2}dx$.

(2) 自由度 n のカイ二乗分布の特性関数を，$\phi_n(t)$ とおくと，カイ二乗分布の再生性より $\phi_2(t) = \{\phi_1(t)\}^2$, $\phi_n(t) = \{\phi_1(t)\}^n = \{\phi_2(t)\}^{n/2}$．(1) で求めた，$\phi_2(t)$ を用いる．$\phi_2(t) = \{\phi_1(t)\}^2$ だけでは，$\phi_1(t)$ は一意に定まらないが，特性関数の連続性と，$\phi_1(0) = 1$ から，特定できる．

6.2-2. ガンマ関数の定義と性質

$$\Gamma[a] = \int_0^\infty e^{-x} x^{a-1} dx = \frac{1}{a}\Gamma[a+1] \quad (a > 0)$$

を利用する．($a \leq 0$ のときは，積分は発散する．)

6.2-3.

(1) 定理 6.7 より 分散は，$n\mathrm{E}(X^2)\mathrm{E}\left(\dfrac{1}{Y}\right)$．6.2-2 の結果を利用する．

(2) 定理 6.8 より $V \sim F_{m,n}$ とすると $\mathrm{E}(V^k) = \left(\dfrac{n}{m}\right)^k \mathrm{E}(X^k)\mathrm{E}\left(\dfrac{1}{Y^k}\right)$