平成１６年度確率・統計Ｂ中間試験問題

平成１６年１１月２４日

問題１． X, Y は独立に，区間 $(-1,1)$ 上の一様分布 $U(-1,1)$ にしたがう確率変数とする．

(1) X の特性関数を求めよ．

(2) $Z = X + Y$ の特性関数を求めよ．

(3) $\mathrm{E}(Z^2)$ の値を求めよ．

問題２． (1) ２項分布 $B(n,p)$ の特性関数は，$\{e^{it}p + (1-p)\}^n$ であることを証明せよ．

(2) ２次元確率変数 (X,Y) の特性関数が，

$$\varphi_{(X,Y)}(t_1,t_2) = \frac{1}{3^n}(e^{it_1} + e^{it_2} + 1)^n$$

であるとする．X の確率分布は何か？

問題３． $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ は互いに独立にポアッソン分布 $P(2)$ に従う確率変数列とする．

(1) $S_n = \dfrac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$ は $n \to \infty$ のとき，ある定数 c に確率収束する．c の値は何か．

(2) c を (1) の定数とする．$n \to \infty$ のとき，

$$Z_n = \frac{S_n - c}{ns} \xrightarrow{d} N(0,1)$$

となるような，定数 s の値は何か．

問題４． $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ は互いに独立に，次の確率密度関数を持つ分布に従う確率変数列とする．

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x}} & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

$U_n = \max_{i \le n} X_i$ とする．

(1) U_n の確率分布関数を求めよ．

(2) $n \to \infty$ のとき，U_n は 1 に確率収束することを示せ．

(3) $W_n = n(1 - U_n)$ とすると，$n \to \infty$ のとき，W_n はある連続型分布に分布収束する．極限分布の確率密度関数を求めよ．

[参考] 一様分布，２項分布，ポアッソン分布の確率密度関数（確率関数）

$$\text{一様分布 } U(a,b) : f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & (a < x < b) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

$$\text{２項分布 } B(n,p) : f(x) = \begin{cases} \frac{n!}{x!(n-x)!}p^x(1-p)^{n-x} & (x = 0,1,\cdots,n) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

$$\text{ポアッソン分布 } P(\lambda) : f(x) = \begin{cases} e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!} & (x = 0,1,2,\cdots) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$