平成１６年度確率・統計Ｂ期末試験問題

平成１７年２月９日

正の整数 p，正の実数 a と，実数 b に対して，次の確率密度関数を持つ連続型確率分布を，$\Gamma_p(a,b)$ と表す：

$$f_p(x;a,b) = \begin{cases} \frac{1}{a(p-1)!}\left(\frac{x-b}{a}\right)^{p-1} e^{-\frac{x-b}{a}} & x > b \\ 0 & x \le b \end{cases}$$

問題 1. $\Gamma_1(1,0)$ の特性関数は $(1-it)^{-1}$ である．このことを用いて，以下に答えよ．

(1) p, q を正の整数とする．X, Y は独立で，$X \sim \Gamma_p(1,0)$, $Y \sim \Gamma_q(1,0)$ ならば $X+Y \sim \Gamma_{p+q}(1,0)$ であることを示せ.

(2) $\Gamma_p(1,0)$ の特性関数は $(1-it)^{-p}$ であることを示せ.

(3) $a > 0$ とする．$X \sim \Gamma_p(1,0)$ のとき，$aX + b \sim \Gamma_p(a,b)$ であることを示せ.

(4) $\Gamma_p(a,b)$ の特性関数を，a, b, p を用いて表せ．((1), (2),(3) が証明できなくても，正しいものとして利用してよい．)

問題 2. $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ は，互いに独立に $\Gamma_1(\theta,0)$ に従う確率変数列とする．

(1) $\dfrac{X_1 + \cdots X_n}{n}$ は，$n \to \infty$ のとき，θ に確率収束することを示せ.

(2) $\boldsymbol{c} = (c_1, \cdots, c_n)$ に対して，θ の推定量

$$\hat{\theta}_{\boldsymbol{c}} = \sum_{j=1}^{n} c_j X_j$$

を定義する．$\hat{\theta}_{\boldsymbol{c}}$ が θ の不偏推定量となるための，$c_1, \cdots, c_n$ に関する条件を求めよ．

(3) $n = 2$ の場合で，(2) で求めた条件の下で，分散 $\mathrm{Var}(\hat{\theta}_{\boldsymbol{c}})$ が最小となるような c_1, c_2 の値を求めよ．

問題 3. $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ は，互いに独立に $\Gamma_2(\theta,1)$ に従う確率変数列とする．

(1) θ の尤度関数を求めよ.

(2) θ の最尤推定量を求めよ.

問題 4. 次の (a), (b) のいずれかを選択して答えよ.

(a) $X_1, X_2, \cdots, X_n$ は，互いに独立に $\Gamma_1(1,b)$ に従う確率変数とする．
$Y = \min\{X_1, \cdots, X_n\}$ とするとき，$Y \sim \Gamma_1(\frac{1}{n}, b)$ であることを示せ.

(b) 母集団分布とは何か，例をあげて説明せよ.