確率・統計Ｂ　レポート問題

平成１７年１２月16日（金）に修正

以下の問題の解等をA4の用紙にまとめ、学生番号、氏名、提出日時を記入した表紙をつけて、数学事務室内のボックスに提出してください。

提出締め切り：２００６年1月１０日（火）１７：００

問題 1. (1) １次元確率変数 X の特性関数の定義を書け。

(2) 平均が λ のポアソン分布 $P(\lambda)$ の特性関数が、

$$\exp(\lambda(e^{it}-1))$$

であることを示せ。

(3) 区間 $(0,2)$ 上の一様分布の特性関数を求めよ。

問題 2. $X \sim N(\mu,\sigma^2)$ のとき、X の特性関数は $\varphi_X(t)=\exp\{it\mu-\frac{1}{2}\sigma^2t^2\}$ である。このことを利用して、$X_1,\cdots,X_n$ が互いに独立で、$X_j \sim N(\mu_j,\sigma_j^2)$ $(j=1,\cdots,n)$ であるとき、

$$\textstyle\sum_{j=1}^n X_j \sim N\left(\sum_{j=1}^n \mu_j, \sum_{j=1}^n \sigma_j^2\right)$$

であることを示せ。

問題 3. (1) $X \sim N(0,1)$ とする。特性関数を利用して，$\mathrm{E}(X),\mathrm{E}(X^2),\mathrm{E}(X^3),\mathrm{E}(X^4)$ の値を求めよ.

(2) $Y=X^2$ とするとき，$\mathrm{E}(Y),\mathrm{Var}(Y)$ の値を求めよ.

(3) $Y_j=X_j^2$ $(j=1,\cdots,n)$ とし，$Z_n=\frac{1}{n}(Y_1+\cdots+Y_n)$ とおく．$n\to\infty$ のとき，Z_n はある定数 c に確率収束することを示せ．このとき c の値はいくらか.

問題 4. $X_1,\cdots,X_n,\cdots$ は互いに独立に，次の確率密度関数をもつ分布に従う確率変数の列とする.

$$f(x)=\begin{cases}2x & 0\le x\le 1\\ 0 & \text{その他}\end{cases}.$$

$U_n=\max_{i\le n} X_i$ とする.

(1) $n\to\infty$ のとき，U_n は 1 に確率収束することを示せ.

(2) $W_n=n(1-U_n)$ とすると，$n\to\infty$ のとき，W_n は，ある連続型分布に分布収束する．極限分布の確率密度関数を求めよ.

問題 5. $X_1,\cdots,X_n \sim i.i.d.\ B(1,p)$ とするとき，

$$\sqrt{n}\left(\tfrac{1}{n}(X_1+\cdots+X_n)-p\right)/\sqrt{p(1-p)} \xrightarrow{d} N(0,1)\ (n\to\infty)$$

であることを示せ.