平成１１年度後期確率統計Ｂ試験問題

平成１２年２月９日

問題１ 確率変数 X の確率密度関数が、

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

であるとき、次の問いに答えよ。

(1) X の特性関数 $\varphi_x(t)$ を求めよ。

(2) $\varphi_x(t)$ は、$t = 0$ で連続であることを示せ。

定義（χ^2 分布の定数倍） 確率変数 X の確率密度関数が,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})2^{n/2}} e^{-x/2} x^{n/2-1} & , \quad x > 0 \\ 0 & , \quad x \leq 0 \end{cases}$$

で与えられるとき，X は自由度 n の**カイ二乗分布**に従うといい，$X \sim \chi_n^2$ と表す。
a を実数として、$\frac{1}{a}X \sim \chi_n^2$ となるとき、$X \sim a\chi_n^2$ と表す。

定理（χ^2 分布の特性関数） $X \sim \chi_n^2$ のとき、X の特性関数は、

$$\phi_n(t) = (1 - 2it)^{-n/2}$$

＊以下の問題では、この定理を用いてよい。

問題２ $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ は互いに独立で、$X_j \sim \sigma^2 \chi_m^2 (j = 1, 2, \cdots, n, \cdots)$ とする。
$S_n = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} X_j$ とおくとき次の問いに答えよ。

(1) S_n の特性関数を求めよ。

(2) $\frac{1}{nm} S_n$ がある定数に確率収束することを示せ。また、その定数の値を求めよ。

(3) $Z_n = a(S_n - b)$ とするとき、Z_n が標準正規分布に分布収束するような a, b の値を求めよ。

問題３ X と Y は独立で、$X \sim \sigma^2 \chi_m^2, Y \sim \sigma^2 \chi_n^2$ とする。

(1) ２次元確率変数 (X, Y) の確率密度関数を求めよ。

(2) 帰無仮説 $H_0 : \sigma^2 = 1$, 対立仮説 $H_1 : \sigma^2 = \sigma_1^2$ (ただし $\sigma_1^2 < 1$) の (X, Y) の実現値 (x, y) に基づく有意水準 α の最強力検定の棄却域は、$\{(x, y) | x + y \leq d\}$ の形であることを示せ。

(3) $Z \sim \chi_{m+n}^2$ とし、その分布関数を $G(z)$ とする。$(G(z) = \mathbf{P}(Z \leq z))$

$$G(d) = \alpha$$

であることを示せ。