平成１１年度後期確率統計Ｂ追試験問題

平成１２年２月16日

問題１ $a < b$ とする。確率変数 X の確率密度関数が、

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & a < x < b \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

であるとき、X の特性関数を求めよ。

問題２ $0 < p < 1$ とする。確率変数 X_n の特性関数が

$$\varphi(t) = \{1 - p + pe^{it}\}^n \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

であるとする。

(1) $\mathbf{E}(X_n)$, $\mathbf{Var}(X_n)$ を求めよ。

(2) $n \to \infty$ とするとき、$\frac{1}{n}X_n$ は、p に確率収束することを示せ。

定義（正規分布） 確率変数 X の確率密度関数が,

$$f(x; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\}$$

で与えられるとき，X は平均 μ, 分散 σ^2 の正規分布に従うといい，$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ と表す。

定理（正規分布の特性関数） $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ のとき、X の特性関数は、

$$\psi(t; \mu, \sigma^2) = e^{i\mu t} \exp(-\frac{\sigma^2 t^2}{2})$$

＊必要ならば、以下の問題で、この定理を用いてよい。

問題３ X と Y は独立で、$X \sim N(1, 2)$, $Y \sim N(2, 1)$ とする。

(1) $Z = X - Y$ の特性関数を求めよ。

(2) Z の確率分布を示せ。

問題４ X と Y は独立で、$X \sim N(\mu, 1)$,$Y \sim N(2\mu, 4)$ とする。

(1) ２次元確率変数 (X, Y) の確率密度関数を求めよ。

(2) 帰無仮説 $H_0 : \mu = 0$, 対立仮説 $H_1 : \mu = \mu_1$ (ただし $\mu_1 > 0$) の (X, Y) の実現値 (x, y) に基づく有意水準 α の最強力検定の棄却域は、$\{(x, y) | ax + y \geq b\}$ の形であることを示せ。このとき、a の値はいくらか。

(3) $Z \sim N(0, 1)$ とし、$\mathbf{P}(Z \leq z) = 1 - \alpha$ となる、z の値を、z_α と表す。このとき、(2) の b の値を、z_α を用いて表せ。