中間試験の解答

問 1. (1) $\mathrm{E}[X_n] = np, \mathrm{Var}[X_n] = np(1-p)$ であるから $\mathrm{E}[\frac{X_n}{n}] = p, \mathrm{Var}[\frac{X_n}{n}] = \frac{p(1-p)}{n}$.
チェヴィシェフの不等式より任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$\mathrm{P}\Big(\Big|\frac{X_n}{n} - p\Big| > \varepsilon\Big) \leq \frac{1}{\varepsilon^2}\frac{p(1-p)}{n} \quad \to \quad 0 \quad (n \to \infty)$$

(2) $Y_1, \ldots, Y_n \overset{i.i.d.}{\sim} B_{1,p}$ とし, $S_n = Y_1 + \cdots + Y_n$ とすると, 二項分布の再生性から $S_n \sim B(n,p)$ となる. したがって Z_n と

$$\frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$$

の極限分布は同じである. $\mathrm{E}[S_n] = np, \mathrm{Var}[S_n] = np(1-p)$ であるから中心極限定理より $Z_n \xrightarrow{d} N(0,1)$ $(n \to \infty)$.

問 2. $X_1, \ldots, X_n$ の共通の分布関数を F とすると,

$$F(x) = \begin{cases} 1 & (x \geq 1) \\ \int_0^x 2 - 2t dt = [2t - t^2]_0^x = 2x - x^2 & (0 \leq x < 1) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$$

(1) $\mathrm{P}(U_n \leq x) = \mathrm{P}(X_1 \leq x, \ldots, X_n \leq x) = \prod_{j=1}^n \mathrm{P}(X_j \leq x) = \{F(x)\}^n$ である.
$x < 1$ のとき $|F(x)| < 1$ であるから $n \to \infty$ のとき $\{F(x)\}^n \to 0$.
また, $x \geq 1$ のとき $F(x) = 1$ であるから $\{F(x)\}^n \to 1$.
ゆえに, $\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(U_n \leq x)$ は, 1 に退化した分布 $U(1)$ の分布関数と一致するので, $U_n \xrightarrow{d} 1$ $(n \to \infty)$
収束先が定数のとき, 分布収束と確率収束は同値であるから
$U_n \xrightarrow{p} 1$ $(n \to \infty)$.

(2) $2x - x^2 = x(2-x)$

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(W_n \leq w) &= \mathrm{P}\Big(1 - U_n \leq \frac{w}{\sqrt{n}}\Big) = \mathrm{P}\Big(U_n \geq 1 - \frac{w}{\sqrt{n}}\Big) \\ &= 1 - \mathrm{P}\Big(U_n < 1 - \frac{w}{\sqrt{n}}\Big) \\ &= 1 - \begin{cases} 1 & (1 - \frac{w}{\sqrt{n}} \geq 1) \\ \Big[(1 - \frac{w}{\sqrt{n}})\{2 - (1 - \frac{w}{\sqrt{n}})\}\Big]^n & (0 \leq 1 - \frac{w}{\sqrt{n}} < 1) \\ 0 & (1 - \frac{w}{\sqrt{n}} < 0) \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & (w \leq 0) \\ 1 - (1 - \frac{w^2}{n})^n & (0 < w \leq \sqrt{n}) \\ 1 & (\sqrt{n} < w) \end{cases} \\ &\to \begin{cases} 0 & (w \leq 0) \\ 1 - e^{-w^2} & (0 < w) \end{cases} \quad (n \to \infty) \end{aligned}$$

したがって, 確率密度関数は

$$\frac{d\mathrm{P}(W_n \leq w)}{dw} = \begin{cases} 0 & (w \leq 0) \\ 2we^{-w^2} & (w > 0) \end{cases}$$

問 3. $F(x)$ を X の分布関数, $F_n(x)$ を X_n の分布関数とする.

<u>$c > 0$ の場合</u>

$c_n \to c\ (n \to \infty)$ より, n_0 が存在して $n \geq n_0$ ならば $c_n > 0$. $n \geq n_0$ のとき $\mathrm{P}(cX \leq x) = F(\frac{x}{c})$, $\mathrm{P}(c_nX_n \leq x) = F(\frac{x}{c_n})$ であるから $\frac{x}{c}$ が F の連続点のとき, $F_n(\frac{x}{c_n}) \to F(\frac{x}{c})$ を示せばよい.

$F(y)$ が $y = \frac{x}{c}$ で連続であるとき, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\delta > 0$ が存在して $|y - \frac{x}{c}| < \delta$ ならば $|F(y) - F(\frac{x}{c})| < \varepsilon$ となる.

$\frac{x}{c} - \delta < y_1 < \frac{x}{c} < y_2 < \frac{x}{c} + \delta$ であるような F の連続点 y_1, y_2 をとると

$$F\left(\frac{x}{c}\right) - \varepsilon < F(y_1) \leq F(y_2) < F\left(\frac{x}{c}\right) + \varepsilon \tag{1}$$

n_0 より大きい n_1 を十分大きくとると, $n \geq n_1$ ならば $y_1 < \frac{x}{c_n} < y_2$ となる. このとき

$$F_n(y_1) \leq F_n\left(\frac{x}{c_n}\right) \leq F_n(y_2)$$

$n \to \infty$ として, 下極限, 上極限をとると

$$F(y_1) \leq \varliminf_{n\to\infty} F_n\left(\frac{x}{c_n}\right) \leq \varlimsup_{n\to\infty} F_n\left(\frac{x}{c_n}\right) \leq F(y_2) \tag{2}$$

(1) より

$$F\left(\frac{x}{c}\right) - \varepsilon < \varliminf_{n\to\infty} F_n\left(\frac{x}{c_n}\right) \leq \varlimsup_{n\to\infty} F_n\left(\frac{x}{c_n}\right) < F\left(\frac{x}{c}\right) + \varepsilon$$

$\varepsilon \to 0+0$ として $\lim_{n\to\infty} F(\frac{x}{c_n}) = F(\frac{x}{c})$ を得る.

<u>$c < 0$ の場合</u>

上の証明から $(-c_n)X_n \xrightarrow{d} (-c)X\ (n \to \infty)$ であるから, $Y_n = -c_nX_n, Y = -c_X$ とすると $Y_n \xrightarrow{d} Y$ ならば $-Y_n \xrightarrow{d} -Y$ を示せばよいが, これは練習問題の問 4(1) で $c = -1$ の場合であるので, 証明は省略する.

<u>$c = 0$ の場合</u>

$\lim_{M\to\infty} \mathrm{P}(|X| \leq M) = 1$ であるから, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, M_0 が存在して $M \geq M_0$ ならば $\mathrm{P}(|X| \geq M) > 1 - \varepsilon$ となるものが存在する.

$K > M$ を $-K, K$ を がともに, $F(x)$ の連続点であるようにとると

$$\begin{aligned} &\mathrm{P}(-K < X_n \leq K) = F_n(K) - F_n(-K) \\ &\quad \to F(K) - F(-K) > \mathrm{P}(|X| \leq M) \quad (n \to \infty) \end{aligned}$$

であるから, n_0 が存在して $n \geq n_0$ ならば $\mathrm{P}(|X_n| \leq K) > 1-\varepsilon$ となる.

任意の $\delta > 0$ に対して n_1 が存在して $n \geq n_1$ ならば $|c_n|K < \delta$ となるので, $n \geq \max\{n_0, n_1\}$ ならば

$$\begin{aligned} &\mathrm{P}(|c_n X_n| \leq \delta) \geq \mathrm{P}(|X_n| \leq K) > 1-\varepsilon, \\ &\mathrm{P}(|c_n X_n| > \delta) \leq 1-(1-\varepsilon) = \varepsilon \end{aligned}$$

となり, これは $c_n X_n \xrightarrow{p} 0$ を意味する. したがって $c_n X_n \xrightarrow{d} 0$.

問 4. 題意より

$$\begin{aligned} &\mathrm{P}(X=5) = \mathrm{P}(X=45) = \frac{5}{50} = \frac{1}{10}, \\ &\mathrm{P}(X=15) = \frac{10}{50} = \frac{2}{10}, \\ &\mathrm{P}(X=25) = \mathrm{P}(X=35) = \frac{15}{50} = \frac{3}{10}. \end{aligned}$$

したがって, $F(30) = \mathrm{P}(X=5$ または $X=15$ または $X=25) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$.

$\mathrm{E}(X) = \dfrac{(5+45)+15\cdot 2+(25+35)\cdot 3}{10} = 26.$

問 5. $W = X$ とおくと

$$\begin{cases} X = W \\ Y = Z - W \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial W} & \frac{\partial X}{\partial Z} \\ \frac{\partial Y}{\partial W} & \frac{\partial Y}{\partial Z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$X \geq 0, Y \geq 0$ となる (Z, W) の領域は $W \geq 0, Z-W \geq 0$ より

$$\{(z, w)\ ;\ 0 \leq w \leq z\}$$

(X, Y) の同時確率密度関数は

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \lambda^2 e^{-\lambda(x+y)} & (x > 0, y > 0) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

であるから, (Z, W) の同時確率密度関数は

$$f_{Z,W}(z, w) = f_{X,Y}(w, z-w) \times 1 = \begin{cases} \lambda^2 e^{-\lambda z} & (0 \leq w \leq z) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

Z の周辺確率密度関数は

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{Z,W}(z, w)dw = \begin{cases} \int_0^z \lambda^2 e^{-\lambda z} dw = \lambda^2 z e^{-\lambda z} & (z \geq 0) \\ 0 & (z < 0) \end{cases}$$

練習問題の解答

問 1. (1) 確率密度関数は

$$f(x) = \frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda} \quad (x = 0, 1, 2, \ldots)$$

なので, $X \sim p(\lambda)$ とするとき, X の特性関数と 平均は

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(e^{itX}) &= \sum_{k=0}^{\infty} e^{itk}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\{e^{it}\lambda\}^k \\
&= e^{-\lambda}\exp\{e^{it}\lambda\} = \exp\{(e^{it}-1)\lambda\} \\
\mathrm{E}(X) &= \sum_{k=0}^{\infty} k\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = \sum_{k=1}^{\infty} k\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^k}{(k-1)!}e^{-\lambda} \\
&= \sum_{l=0}^{\infty}\frac{\lambda^{l+1}}{l!}e^{-\lambda} = \lambda\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\lambda^l}{l!}e^{-\lambda} = \lambda e^{\lambda}e^{-\lambda} = \lambda
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(X) &= \mathrm{E}(X^2) - \{\mathrm{E}(X)\}^2 = \mathrm{E}\{X(X-1)\} + \mathrm{E}(X) - \{\mathrm{E}(X)\}^2 \\
&= \mathrm{E}\{X(X-1)\} + \lambda - \lambda^2, \\
\mathrm{E}\{X(X-1)\} &= \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \\
&= \sum_{k=2}^{\infty}\frac{\lambda^k}{(k-2)!}e^{-\lambda} = \sum_{l=0}^{\infty}\frac{\lambda^{l+2}}{l!}e^{-\lambda} = \lambda^2\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\lambda^l}{l!}e^{-\lambda} = \lambda^2
\end{aligned}$$

したがって, $\mathrm{Var}(X) = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$.

(2) $\mathrm{E}(X_n) = \mathrm{Var}(X_n) = \frac{1}{n}$ であるから, チェヴィシェフの不等式から任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$\mathrm{P}\left(\left|X_n - \frac{1}{n}\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{1}{\varepsilon^2}\frac{1}{n} \to 0 \quad (n \to \infty)$$

したがって, $Y_n := X_n - \frac{1}{n} \xrightarrow{p} 0$ $(n \to \infty)$ である．$X_n = Y_n + \frac{1}{n}$ であり, $\frac{1}{n} \to 0$ $(n \to \infty)$ であるから, 漸近公式により $X_n \xrightarrow{p} 0 + 0 = 0$ $(n \to \infty)$.

(3) $X_1, \ldots, X_n \overset{i.i.d.}{\sim} p(1)$ とし, $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ とするとポアソン分布の再生性から $S_n \sim p(n)$ となる．したがって Z_n と

$$\frac{S_n - n}{\sqrt{n}}$$

の極限分布は同じである．$\mathrm{E}[S_n] = \mathrm{Var}[S_n] = n$ であるから中心極限定理より $Z_n \xrightarrow{d} N(0, 1)$ $(n \to \infty)$.

問 2. (1) Y_n の特性関数を $\phi_{Y_n}(t)$ とおくと, $X_1, \ldots, X_n$ の独立性より

$$\phi_{Y_n}(t) = \mathrm{E}\Big[\exp(it\sum_{k=1}^{n} c^k X_k)\Big] = \mathrm{E}\Big[\prod_{k=1}^{n} e^{itc^k X_k}\Big] = \prod_{k=1}^{n} \mathrm{E}[e^{i(tc^k)X_k}]$$

X_k の特性関数を $\phi(t)$ とおくと, $\mathrm{E}[e^{i(tc^k)X_k}] = \phi(tc^k)$ となるが, $X_k \sim N(0,1)$ であるから, $\phi(t) = e^{-t^2/2}$ したがって,

$$\begin{aligned}\phi_{Y_n}(t) &= \prod_{k=1}^{n} e^{-t^2 c^{2k}/2} = \exp\Big\{-\frac{t^2}{2}\sum_{k=1}^{n} c^{2k}\Big\} \\ &\to \exp\Big\{-\frac{t^2}{2}\sum_{k=1}^{\infty} c^{2k}\Big\} = \exp\Big\{-\frac{t^2}{2}\frac{c^2}{1-c^2}\Big\} \quad (n \to \infty)\end{aligned}$$

これは, $N(0, \frac{c^2}{1-c^2})$ の特性関数 (注) であるから, $Y_n \xrightarrow{d} N(0, \frac{c^2}{1-c^2})$ $(n \to \infty)$ であり, 極限分布の分散は $\frac{c^2}{1-c^2}$ である.

注. $X \sim N(0,1)$ のとき, $aX \sim N(0, a^2)$ となる. 一方で aX の特性関数は, $\mathrm{E}(e^{itaX}) = e^{-(at)^2/2}$ であるから, $a = \sqrt{\frac{c^2}{1-c^2}}$ ととれば, Y_n の特性関数の極限が $N(0, \frac{c^2}{1-c^2})$ の特性関数であることが示される.

(2) $Z_n \xrightarrow{p} 0$ $(n \to \infty)$ と $Z_n \xrightarrow{d} 0$ $(n \to \infty)$ は同値である. ただし, 分布収束先の 0 は確率 1 で 0 という値をとる確率変数 (0 に退化した分布) とみなしている. 0 に退化した分布 $U(0)$ の特性関数は $X \sim U(0)$ とするとき $\mathrm{E}(e^{itX}) = e^{it0} = 1$ となるので, Z_n の特性関数が 1 に収束することの必要十分条件が $a_n \to 0$ $(n \to \infty)$ であることを示せばよい. (1) 同様に計算すると Z_n の特性関数は

$$\phi_{Z_n}(t) = \exp\Big\{-\frac{t^2}{2}a_n^2\sum_{k=1}^{n} c^{2k}\Big\}$$

となる.

$a_n \to 0$ $(n \to \infty)$ ならば, $0 \le \sum_{k=1}^{n} c^{2k} \le \frac{c^2}{1-c^2}$ なので, 各 t について

$$0 \le \frac{t^2}{2}a_n^2\sum_{k=1}^{n} c^{2k} \le \frac{t^2}{2}a_n^2\frac{c^2}{1-c^2} \to 0$$

であるから, $\phi_{Z_n}(t) \to 1$.

逆に, t について $\phi_{Z_n}(t) \to 1$ ならば $\sum_{k=1}^{n} c^{2k} > c^2$ を用いて

$$0 \le \frac{t^2}{2}a_n^2 c^2 \le \frac{t^2}{2}a_n^2\sum_{k=1}^{n} c^{2k} \to 0 \quad (n \to \infty)$$

であるから, $t^2 = \frac{2}{c^2}$ ととると $a_n^2 \to 0$, すなわち, $a_n \to 0$ となる.

問 3. $X_1,\dots,X_n$ の共通の分布関数を F とすると,

$$F(x)=\begin{cases}1 & (x\geq 1)\\ \int_0^x 2tdt=[t^2]_0^x=x^2 & (0\leq x<1)\\ 0 & (x<0)\end{cases}$$

(1) $\mathrm{P}(U_n\leq x)=1-\mathrm{P}(U_n>x)=1-\mathrm{P}(X_1>x,\dots,X_n>x)$
$=1-\prod_{j=1}^n \mathrm{P}(X_j>x)=1-\{1-F(x)\}^n$ である.
$x>0$ のとき $|1-F(x)|<1$ であるから $n\to\infty$ のとき $1-\{1-F(x)\}^n\to 1$.
また, $x\leq 0$ のとき $F(x)=0$ であるから $1-\{1-F(x)\}^n\to 0$.
ゆえに, $x\neq 0$ において, $\lim_{n\to\infty}\mathrm{P}(U_n\leq x)$ は, 0 に退化した分布 $U(0)$ の分布関数と一致するので, $U_n\xrightarrow{d}0\ (n\to\infty)$
収束先が定数のとき, 分布収束と確率収束は同値であるから
$U_n\xrightarrow{p}0\ (n\to\infty)$.

(2)

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(W_n\leq w)&=\mathrm{P}\Big(U_n\leq\frac{w}{\sqrt{n}}\Big)\\ &=1-\begin{cases}0 & (\frac{w}{\sqrt{n}}\geq 1)\\ \{1-\frac{x^2}{n}\}^n & (0\leq\frac{w}{\sqrt{n}}<1)\\ 1 & (\frac{w}{\sqrt{n}}<0)\end{cases}\\ &=\begin{cases}1 & (\sqrt{n}\leq w)\\ 1-(1-\frac{w^2}{n})^n & (0<w\leq\sqrt{n})\\ 0 & (w<0)\end{cases}\\ &\to\begin{cases}0 & (w\leq 0)\\ 1-e^{-w^2} & (0<w)\end{cases}\quad(n\to\infty)\end{aligned}$$

したがって, 確率密度関数は

$$\frac{d\mathrm{P}(W_n\leq w)}{dw}=\begin{cases}0 & (w\leq 0)\\ 2we^{-w^2} & (w>0)\end{cases}$$

問 4. (1) <u>$c>0$ のとき</u>
$\mathrm{P}(cX\leq x)=F(\frac{x}{c})$, $\mathrm{P}(cX_n\leq x)=F(\frac{x}{c})$ であるから $\frac{x}{c}$ が F の連続点のとき, $F_n(\frac{x}{c})\to F(\frac{x}{c})$ を示せばよいが, これは $X_n\xrightarrow{d}X$ の定義から明らかである.
<u>$c=0$ のとき</u>
確率 1 で $cX_n=cX=0$ つまり, 同じ分布 $U(0)$ に従うから明らかに, $cX_n\xrightarrow{d}cX$.
<u>$c<0$ のとき</u>

上の証明により, $(-c)X_n \xrightarrow{d} (-c)X$ であるから $c = -1$ の場合を示せばよい.

$G(x) = \mathrm{P}(X \geq x)$ と定義すると, 分布関数が右連続であることと同様にして $G(x)$ は左連続であり, $G(x)$ が x で連続であるために必要十分条件は $\mathrm{P}(X = x) = 0$ であることがわかり, したがって, $G(x)$ が x であることと $F(x)$ が x で連続であることも必要十分である.

$-X$ の分布関数は $\mathrm{P}(-X \leq x) = \mathrm{P}(X \geq -x) = G(-x)$, であり, $G_n(x) = \mathrm{P}(X_n \geq x)$ と定義すると, $-X_n$ の分布関数は $G_n(-x)$ となる. したがって, $-x$ が G の連続点, すなわち, F の連続点であるとき, $G_n(-x) \to G(-x) = 1 - F(-x)$ であることを示せばよい.

$$G_n(-x) = \mathrm{P}(X_n \geq -x) = 1 - \mathrm{P}(X_n < -x) = 1 - \mathrm{P}(X_n \leq -x) + \mathrm{P}(X_n = -x)$$

$X_n \xrightarrow{d} X$ より, $\mathrm{P}(X_n \leq -x) \to F(-x)$ であるから $\mathrm{P}(X_n = -x) \to 0$ を示せばよい.

$-x$ は F の連続点であるから, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して F の連続点 y で $0 \leq F(-x) - F(y) < \varepsilon$ を満たすものがとれる. このとき

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X_n = -x) &\leq F_n(-x) - F_n(y) \\ &\to F(-x) - F(y) < \varepsilon \quad (n \to \infty)\end{aligned}$$

となり, ε は任意であったから $\mathrm{P}(X_n = -x) \to 0$ である.

(2) $\lim_{M\to\infty} \mathrm{P}(|X| \leq M) = 1$ であるから, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, M_0 が存在して $M \geq M_0$ ならば $\mathrm{P}(|X| \geq M) > 1 - \varepsilon$ となるものが存在する.
$K > M$ を $-K, K$ を がともに, $F(x)$ の連続点であるようにとると

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(-K < X_n \leq K) &= F_n(K) - F_n(-K) \\ &\to F(K) - F(-K) > \mathrm{P}(|X| \leq M) \quad (n \to \infty)\end{aligned}$$

であるから, n_0 が存在して $n \geq n_0$ ならば $\mathrm{P}(|X_n| \leq K) > 1 - \varepsilon$ となる.
任意の $\varepsilon > 0,\ \delta > 0$ に対して

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\Big(\Big|\frac{1}{X_n} - \frac{1}{c}\Big| > \delta\Big) &= \mathrm{P}\Big(\frac{|X_n - c|}{|X_n c|} > \delta\Big) \\ &= \mathrm{P}\Big(\frac{|X_n - c|}{|X_n c|} > \delta, |X_n| \leq K\Big) + \mathrm{P}\Big(\frac{|X_n - c|}{|X_n c|} > \delta, |X_n| > K\Big) \\ &\leq \mathrm{P}(|X_n - c| > \delta K|c|) + \mathrm{P}(|X_n| > K) \leq \mathrm{P}(|X_n - c| > \delta K|c|) + \varepsilon\end{aligned}$$

したがって $n \to \infty$ とした上極限をとると

$$\varlimsup_{n\to\infty} \mathrm{P}\Big(\Big|\frac{1}{X_n} - \frac{1}{c}\Big| > \delta\Big) \leq \varepsilon$$

となり, ε は任意であったから $\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(|\frac{1}{X_n} - \frac{1}{c}| > \delta) = 0$

問 5. (1)

$$f(x) := \mathrm{P}(X = x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & (x = -10) \\ \frac{3}{4} & (x = 1) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

(2) 5 枚中, 1 枚でもスペードが含まれていたら $X_1 + \cdots + X_5 < 0$ となるので, 求める確率は, 1 から すべてスペード以外となる確率を引けばよい. スペード以外の 39 枚から 5 枚を取りだす順列を, 52 枚から 5 枚を取りだす順列で割れば, スペード以外を 5 枚取り出す確率となるので

$$\mathrm{P}(X_1 + \cdots + X_5 < 0) = 1 - \frac{39 \times 38 \times 37 \times 36 \times 35}{52 \times 51 \times 50 \times 49 \times 48}$$

(3)

$$\mathrm{P}(X_1 + \cdots + X_5 < 0) = 1 - \left(\frac{39}{52}\right)^5$$

問 6. 中心極限定理より

$$Z_n = \frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{\sigma} \xrightarrow{d} N(0, 1) \quad (n \to \infty)$$

また, 大数の法則より

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \xrightarrow{p} \mathrm{E}(X^2) = \mathrm{Var}(X) + \{\mathrm{E}(X)\}^2 = \sigma^2 + \mu^2.$$

また, $\bar{X}_n \xrightarrow{p} \mu$ であるから, 漸近公式より

$$S_n^2 = \frac{n}{n-1}\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \bar{X}_n^2\right\} \xrightarrow{p} 1 \times \{(\sigma^2 + \mu^2) - \mu^2\} = \sigma^2$$

したがって, 漸近公式より

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{S_n} = Z_n\sqrt{\frac{\sigma^2}{S_n^2}} \xrightarrow{d} N(0, 1) \quad (n \to \infty)$$

問 7. (1) 正規分布に従う確率変数の一次式も正規分布なので, 平均と分散を計算すれば分布がわかる.

$$\mathrm{E}(Z) = c\mathrm{E}(X) + (1-c)\mathrm{E}(Y) = 0,$$
$$\mathrm{Var}(Z) = c^2\mathrm{Var}(X) + (1-c)^2\mathrm{Var}(Y) = c^2 + (1-c)^2$$

したがって $Z \sim N(0, c^2 + (1-c)^2)$. $\mathrm{Var}(Z)$ の最小値は $c = \frac{1}{2}$ のとき $\frac{1}{2}$ となる. (計算は省略)

(2) W の分布関数を $F_W(w)$ とおくと $w \leq 0$ のときは $F_W(w) = 0$. $w > 0$ のとき

$$F_W(w) = \mathrm{P}(X^2 \leq w) = \mathrm{P}(-\sqrt{w} \leq X \leq \sqrt{w}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\sqrt{w}}^{-\sqrt{w}} e^{-x^2/2} dx$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_{\sqrt{w}}^{0} e^{-x^2/2} dx$$

w で微分すると $w > 0$ のとき, 確率密度関数 $f_W(w)$ は

$$f_W(w) = \frac{d}{dw} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_{\sqrt{w}}^{0} e^{-x^2/2} dx = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} e^{-w/2} \frac{1}{2\sqrt{w}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-w/2} w^{-1/2}$$

$w < 0$ のときは $f_W(w) = 0$

(3) $W = X^2$, $Z = Y^2$ の同時確率密度関数は

$$f_{W,Z}(w,z) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} e^{-(w+z)/2} w^{-1/2} z^{-1/2} & (w > 0, z > 0) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

となる.

$$W = X^2 = AB, \quad Z = Y^2 = A - AB,$$
$$\begin{vmatrix} \frac{\partial W}{\partial A} & \frac{\partial W}{\partial B} \\ \frac{\partial Z}{\partial A} & \frac{\partial Z}{\partial B} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} B & A \\ (1-B) & -A \end{vmatrix} = -A$$

したがって A, B の同時確率密度関数は

$$f_{A,B}(a,b) = f_{W,Z}(ab, a - ab)$$
$$= \begin{cases} \frac{1}{2\pi} e^{-a/2} (ab)^{-1/2} (a - ab)^{-1/2} a & (a > 0,\ 0 < b < 1) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$
$$= \begin{cases} \frac{1}{2\pi} e^{-a/2} b^{-1/2} (1-b)^{-1/2} & (a > 0,\ 0 < b < 1) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

(4) (訂正, 下の行列 A が正則行列であるという仮定が必要でした.)

$$\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

とおくと,

$$\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} \sim N_2 \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, AA' \right)$$

$\Sigma = AA'$ と表すと, 確率密度関数は

$$f(u,v) = \frac{1}{2\pi} |\Sigma|^{-1/2} \exp\Bigl\{ (u\ v) \Sigma^{-1} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \Bigr\}$$

(5) Σ^{-1} は対称行列なので

$$\Sigma^{-1} = \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}$$

とおく. $U \sim N(0, a^2+b^2)$, $V \sim N(0, c^2+d^2)$ となるので $a^2+b^2 = s^2$, $c^2+d^2 = t^2$ とおくと

と, $f(u,v)$ が U, V の周辺確率密度関数の積として表されるための必要十分条件は, U, V の周辺分布の密度関数を具体的に書いて, その積と, $f_{U,V}(u,v)$ とを比較すると, 任意の u, v に対して

$$\begin{aligned} &eu^2 + 2fuv + gv^2 = s^{-2}u^2 + t^{-2}v^2, \\ &\sqrt{eg - f^2} = s^{-1}t^{-1} \end{aligned} \tag{3}$$

となる. このとき, $f = 0$ でなければならないが, これは, Σ^{-1}, したがって

$$\Sigma AA' = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & ac+bd \\ ac+bd & c^2+d^2 \end{pmatrix}$$

が対角行列であることを示し, したがって $ac+bd = 0$. 逆に $ac = bd = 0$ ならば (3) が成り立つ.