

確率・統計B 中間試験問題

2011.11.30

問1. $X_n \sim B(n, p)$, $n = 1, 2, \dots$ とする. ただし, $B(n, p)$ は繰り返し数 n , 成功確率 p の2項分布を表す.

- (1) $\frac{X_n}{n} \xrightarrow{p} p$ ($n \rightarrow \infty$) であることを示せ.
 (2)

$$Z_n = \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \xrightarrow{d} N(0, 1) \quad (n \rightarrow \infty)$$

であることを示せ.

問2. X_1, X_2, \dots は互いに独立な連続型確率変数で, 次の確率密度関数をもつとする.

$$f(x) = \begin{cases} 2 - 2x & (0 \leq x < 1) \\ 0 & (x < 0 \text{ or } x \geq 1) \end{cases}.$$

- (1) $U_n = \max_{i \leq n} X_i$ とするとき, $U_n \xrightarrow{p} 1$ ($n \rightarrow \infty$) であることを示せ.
 (2) $W_n = \sqrt{n}\{1 - \max_{i \leq n} X_i\}$ とする. $n \rightarrow \infty$ のときの W_n の極限分布の確率密度関数を求めよ.

問3. $\{X_n\}_{n=1,2,\dots}$ は確率変数列, $\{c_n\}_{n=1,2,\dots}$ は実数列とする. 分布収束の定義のみを用いて, $X_n \xrightarrow{d} X$ ($n \rightarrow \infty$), $c_n \rightarrow c$ ($n \rightarrow \infty$) ならば $c_n X_n \xrightarrow{d} cX$ ($n \rightarrow \infty$) であることを示せ.

問4. 次の表は, 50人のクラスに対して50点満点のテストを行った結果を度数分布表にまとめたものである.

得点範囲 (階級値)	0 ~ 10 (5)	11 ~ 20 (15)	21 ~ 30 (25)	31 ~ 40 (35)	41 ~ 50 (45)
人数	5	10	15	15	5

このクラスを母集団として, 無作為抽出した生徒の得点が含まれる階級の階級値を X とする. 例えば, 38点のときは, “31 ~ 40” の階級に含まれるので, $X = 35$ となる. X の母集団分布の分布関数を $F(x)$ とするとき, $F(30)$ および X の平均 $E(X)$ の値を求めよ.

問5. X, Y は独立に指数分布 $Ex(\lambda)$ に従う確率変数とする. ただし, $Ex(\lambda)$ の確率密度関数は

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$$

である. このとき, $Z = X + Y$ の確率密度関数を求めよ.