練習問題1

問 1 (1) パラメータ λ のポアソン分布 $p(\lambda)$ の特性関数と, 平均, 分散を求めよ.

(2) $X_n \sim p(1/n),\ n = 1, 2, \ldots$ とするとき $X_n \xrightarrow{p} 0\ (n \to \infty)$ であることを示せ.

(3) $Y_n \sim p(n),\ n = 1, 2, \ldots$ とするとき

$$Z_n = \frac{Y_n - n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{d} N(0,1) \quad (n \to \infty)$$

であることを示せ.

問 2 $X_1, X_2, \ldots$ は互いに独立に, $N(0,1)$ に従う確率変数列とする. $0 < c < 1$ として,

$$Y_n = \sum_{k=1}^{n} c^k X_k, \quad n = 1, 2, \ldots$$

と定義する.

(1) $N(0,1)$ の特性関数が $e^{-t^2/2}$ であることを用いて, $n \to \infty$ のとき, Y_n は, 正規分布に分布収束することを示せ. このとき, 極限分布の分散を c を用いて表せ.

(2) 実数列 $a_1, a_2, \ldots$ に対して, $Z_n = a_n Y_n,\ n = 1, 2, \ldots$ と定義する. $Z_n \xrightarrow{p} 0\ (n \to \infty)$ となるための必要十分条件は $a_n \to 0\ (n \to \infty)$ であることを示せ.

問 3 $X_1, X_2, \ldots$ は互いに独立な連続型確率変数で, 次の確率密度関数をもつとする.

$$f(x) = \begin{cases} 2x & (0 \le x < 1) \\ 0 & (x < 0 \text{ or } x \ge 1) \end{cases}.$$

(1) $U_n = \min_{i \le n} X_i$ とするとき, $U_n \xrightarrow{p} 0\ (n \to \infty)$ であることを示せ.

(2) $W_n = \sqrt{n} \min_{i \le n} X_i$ とする. $n \to \infty$ のときの W_n の極限分布の確率密度関数を求めよ.

問 4 確率収束, 分布収束の定義のみを用いて次を証明せよ.

(1) c を定数とするとき, $X_n \xrightarrow{d} X\ (n \to \infty)$ ならば $cX_n \xrightarrow{d} cX\ (n \to \infty)$.

(2) $\mathrm{P}(X_n = 0) = 0, c \neq 0$, かつ, $X_n \xrightarrow{p} c\ (n \to \infty)$ ならば
$1/X_n \xrightarrow{p} 1/c\ (n \to \infty)$.

問 5 ジョーカーを除く 1 組 52 枚のトランプを母集団とする.

(1) この母集団からカードを無作為抽出し, そのカードがスペードなら $X = -10$, スペード以外なら $X = 1$ とする. このとき, X の母集団分布の確率関数を書け.

(2) 非復元抽出で無作為に 5 枚のカードを抽出し, 選ばれたカードの, X の値を $X_1, \ldots, X_5$ とする. このとき,

$$\mathrm{P}(X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 < 0)$$

を求めよ.

(3) 復元抽出で無作為に 5 回カードを抽出し, 選ばれたカードの, X の値を $X_1, \ldots, X_5$ とする. このとき,

$$\mathrm{P}(X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 < 0)$$

を求めよ.

問 6 $X_1, \ldots, X_n$ を母集団分布 P からの無作為標本とし, $\mathrm{E}(X_1) = \mu, \mathrm{Var}(X_1) = \sigma^2$ とする. $\bar{X}_n$ を標本平均, S_n^2 を標本分散とするとき

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{S_n} \xrightarrow{d} N(0,1) \quad (n \to \infty)$$

を示せ.

問 7 X, Y は独立に, $N(0,1)$ に従う確率変数とする.

(1) c を定数とするとき, $Z = cX + (1-c)Y$ の分布は何か. このとき, $\mathrm{Var}(Z)$ を最小にする c の値を求めよ.

(2) $W = X^2$ の確率密度関数を求めよ.

(3) $A = X^2 + Y^2, B = \frac{X^2}{X^2+Y^2}$ とするとき, (A, B) の同時確率密度関数を求めよ.

(4) a, b, c, d を定数, $U = aX + bY, V = cX + dY$ とする. $\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}$ の同時確率密度関数を求めよ.

(5) (4) において, U, V が独立となるための必要十分条件は $ac + bd = 0$ となることを示せ.