練習問題 2

問 1 $X_1, X_2, \ldots, X_5$ は互いに独立な連続型確率変数で, 次の確率密度関数をもつとする.

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}.$$

$Y = X_{(3)}$ を X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 の標本メジアンとする. Y の確率密度関数を求めよ.

問 2 n 正の定数とし, $X \sim p(n\theta)$, $(0 < \theta)$ とする. θ の不偏推定量に対する, クラメール−ラオの不等式を求め, $\hat{\theta} = \frac{1}{n}X$ は θ の一様最小分散不偏推定量であることを示せ.

問 3 n を偶数 (既知) とし, $X \sim B(n, \theta)$ $(0 < \theta < 1)$ (2 項分布) とする. $0 < \alpha < 1$ に対して整数 k は $\alpha = 2^{-n} \sum_{j=0}^{k} \frac{n!}{j!(n-j)!}$ を満たすとする. また, 集合 $\mathcal{W}$ を

$$\mathcal{W} = \{m \in \mathbb{Z}\ ;\ 0 \leq m \leq k\}$$

と定義する.

(1) 検定問題

帰無仮説 $H_0 : \theta = 0.5$, 　対立仮説 $H_1 : \theta = \theta_1$ $(\theta_1 < 0.5)$

に対して, $\mathcal{W}$ は有意水準 α の最強力検定の棄却域であることを証明せよ.

(2) 検定問題

帰無仮説 $H_0 : \theta = 0.5$, 　対立仮説 $H_1 : \theta \neq 0.5$

に対して, 有意水準 α の一様最強力検定は存在しないことを示せ.

問 4 $X_1, X_2, \ldots, X_n \sim$ i.i.d. $Ex(\lambda)$ とする. ただし, $Ex(\lambda)$ の確率密度関数は

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$$

である.

(1) 検定問題

帰無仮説 $H_0 : \lambda = 1$, 　対立仮説 $H_1 : \lambda > 1$

に対する有意水準 α の一様最強力検定を求めよ.

(2) 検定問題

帰無仮説 $H_0 : \lambda = \lambda_0$, 　対立仮説 $H_1 : \lambda \neq 1$

に対する有意水準 α の一様最強力検定は存在しないことを示せ.

(3) $\bar{X}_n = (X_1 + \cdots + X_n)/n$ とする. $\gamma(\lambda) := \mathrm{E}(\bar{X}_n)$ を λ の式として表せ.

(4) $\bar{X}_n$ は, $\gamma(\lambda)$ の一様最小分散不偏推定量であることを証明せよ.