演習問題 1

13.10.23

確率密度関数が

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda} & x = 0, 1, \ldots \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

で与えられる離散型分布をパラメータ $\lambda > 0$ のポアソン分布といい , $p(\lambda)$ で表す.

問 1. $p(\lambda)$ の特性関数を求めよ.

問 2. $X \sim p(\lambda)$ とする. $\lambda > 0$ のとき, 任意の自然数 ℓ に対して $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k k^\ell}{k!} < \infty$ であることを示し, 特性関数を微分することにより, $\mathrm{E}(X), \mathrm{E}(X^2)$ を計算せよ. また, $\mathrm{Var}(X) = \lambda$ を示せ.

問 3. 特性関数を利用して, 確率変数 X, Y は独立で, $X \sim p(\lambda)$, $Y \sim p(\mu)$ であるとき, $Z = X + Y \sim p(\lambda + \mu)$ であることを示せ.

問 4. $X_n \sim p(n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ とし, $Y_n = \dfrac{X_n}{n}$ とおく. $Y_n \xrightarrow{p} 1 \quad (n \to \infty)$ を示せ.
(ヒント : $\mathrm{E}(Y_n), \mathrm{Var}(Y_n)$ を計算して, チェビシェフの不等式を用いる.)

問 5. $X_n \sim p(n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ とし, $Z_n = \dfrac{X_n - n}{\sqrt{n}}$ とおく. Z_n の特性関数の $n \to \infty$ のときの極限を求め, $Z_n \xrightarrow{d} N(0, 1) \quad (n \to \infty)$ であることを示せ.
(ヒント : $\log \phi_{Z_n}(t) \to -t^2/2$ を示す.)

問 6. $\{X_n\}$ を確率空間 $(\Omega, \mathcal{B}, \mathrm{P})$ 上で定義された確率変数列とし, c を定数とする. また, $g(x)$ は連続関数とする.
$X_n \xrightarrow{a.s.} c$ $(n \to \infty)$ ならば $g(X_n) \xrightarrow{a.s.} g(c)$ $(n \to \infty)$ であることを証明せよ.