演習問題3

X は連続型確率変数で, その確率密度関数は次式で与えられる. ただし, C は定数である.

$$f(x) = \begin{cases} Cx & (0 \leq x \leq 1) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

また, $X_1, X_2, \ldots, X_n$ を X と同じ分布に従う独立な確率変数とし,

$$Y_n = \min\{X_1, \ldots, X_n\}$$
$$Z_n = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$$

とする.

(1) C の値を求めよ.

(2) X の特性関数 $\varphi_X(t)$ をする. $t \neq 0$ に対して $\varphi_X(t)$ を計算し, $\lim_{t\to 0} \varphi_X(t)$ を求めよ. ($\varphi_X(t)$ は連続であるから極限値が $\varphi_X(0)$ であることはわかっているが, それを計算で確認する問題)

(3) 特性関数を微分することにより, $\mathrm{E}(X), \mathrm{E}(X^2)$ を計算し, $\mathrm{Var}(X)$ を求めよ.

(4) $S_n = \sum_{j=1}^n X_j$ とする. $a_n, b_n > 0$ に対して

$$\frac{S_n - a_n}{b_n} \xrightarrow{d} N(0, 2)$$

である. このとき

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n}, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{\sqrt{n}}$$

の値を求めよ. (a_n, b_n は一意に定まらない)

(5) $X_1, \ldots, X_n$ から定義される経験分布関数を $F_n(x)$ とする. $\mathrm{E}\{F_n(\frac{1}{2})\}, \mathrm{Var}\{F_n(\frac{1}{2})\}$ を n を用いて表わせ.

(6) $0 < y < z < 1$ のとき, $\mathrm{P}(Y_n > y, Z_n < z)$ を n を用いて表わせ.

(7) (Y_n, Z_n) の同時分布関数 $G_n(y, z) = \mathrm{P}(Y_n \leq y, Z_n \leq z)$ を n を用いて表わせ.

(8) $(Y_n + Z_n)/2$ は, ある定数 d に確率収束することを示せ. また, d の値を答えよ.

(9) $W_n = \sqrt{n}\, Y_n$ は $n \to \infty$ のとき, ある分布に分布収束する. 極限分布の確率密度関数を求めよ.