演習問題 4

2014.1.29

問 1 $X_1, \dots, X_n \overset{i.i.d.}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$, $\hat{\mu} = \dfrac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j$ とする.

(1) $\hat{\mu}$ の偏りを求めよ.

(2) $\hat{\mu}$ の分散を求めよ.

(3) $\hat{\mu}$ の平均 2 乗誤差を求めよ.

(4) $\hat{\mu}$ の集中確率 $\mathrm{P}(|\hat{\mu} - \mu| \leq a)$ を $a, n, \sigma$ と 標準正規分布関数 $\Phi$ を用いて表わせ.

(5) $\hat{\mu}$ は一致推定量であることを示せ.

問 2 $X_1, X_2$ を独立に $E(1/\mu)$ に従う確率変数とする.

(1) $\mathrm{E}(X_1), \mathrm{E}(X_1^2), \mathrm{Var}(X_1)$ を求めよ.

(2) $(X_1, X_2)$ の同時確率密度関数 $f(x_1, x_2;\ \mu)$, および $\mu$ の Fisher 情報量を求めよ.

(3) $T = X_1 + X_2$ は $\mu$ の十分統計量である. 理由を述べよ.

(4) $(X_1, T)$ の同時確率密度関数を求めよ.

(5) $T = t$ を与えたときの $X_1$ の条件付き確率密度関数を求めよ.

(6) $g(T) = \mathrm{E}[X_1 \,|\, T]$ を求めよ.

(7) $g(T)$ は $\mu$ の一様最小分散不偏推定量であることを示せ.

問 3 $X_1, \dots, X_n \overset{i.i.d.}{\sim} G(p)$ とする.

(1) $\mathrm{E}(X_1)$ を求めよ.

(2) $p$ の最尤推定量 $\hat{p}_n$ を求めよ.

(3) $\hat{p}_n$ は $p$ の一致推定量であることを示せ.

問 4 $X \sim E(n\lambda)$ とする.

(1) 帰無仮説 $H_0 : \lambda = 1$, 対立仮説 $H_1 : \lambda = 2$
に対する有意水準 $\alpha$ の最強力検定の棄却域を求めよ.

(2) 帰無仮説 $H_0 : \lambda = 1$, 対立仮説 $H_2 : \lambda < 1$
に対する有意水準 $\alpha$ の一様最強力検定の棄却域を求めよ.

**指数分布** : $E(\lambda)$ $\quad f(x;\lambda) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$

**幾何分布** : $G(p)$ $\quad f(x;p) = p(1-p)^x \ (x = 0, 1, 2, \dots)$