確率・統計 B
標本分布・推定

若木宏文

wakaki@math.sci.hiroshima-u.ac.jp

2014.01.08

table of contents

復習

十分統計量 (1,2/8)

定義 7.2

$\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)' \sim \mathsf{P}$, $\mathsf{P} \in \mathcal{P} = \{\mathsf{P}_{\boldsymbol{\theta}};\ \boldsymbol{\theta} \in \Theta\}$ とする．統計量 $T = T(\boldsymbol{X})$ は, $T = t$ を与えたときの $\boldsymbol{X}$ の条件付き分布が $\boldsymbol{\theta}$ に無関係であるとき, $\boldsymbol{\theta}$ あるいは, 分布族 $\mathcal{P}$ の十分統計量であるという.

定理 7.4 (ラオーブラックウエルの定理)

$\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)' \sim \mathsf{P}$, $\mathsf{P} \in \mathcal{P} = \{\mathsf{P}_{\boldsymbol{\theta}};\ \boldsymbol{\theta} \in \Theta\}$
$T = T(\boldsymbol{X})$: 十分統計量
$\hat{\gamma}(\boldsymbol{X})$: $\gamma(\boldsymbol{\theta})$ の不偏推定量

$\gamma^*(T) = \mathsf{E}\{\hat{\gamma}(\boldsymbol{X})|T\}$ と定義すると

$$\mathsf{E}\{\gamma^*(T)\} = \gamma(\boldsymbol{\theta}) \quad \text{かつ} \quad \mathsf{Var}\{\gamma^*(T)\} \leq \mathsf{Var}\{\hat{\gamma}(\boldsymbol{X})\}$$

が成立する.

十分統計量 (3,4/8)

定理 7.5 (分解定理)

$f(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\theta})$: $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)'$ の確率密度関数

$T(\boldsymbol{X})$ が $\boldsymbol{\theta}$ の十分統計量であるための必要十分条件は,

f が非負値関数 g, h を用いて, 次のように書けることである.

$$f(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\theta}) = g(\boldsymbol{x})h(T(\boldsymbol{x});\boldsymbol{\theta})$$

定義 7.3 (完備十分統計量)

T は $\boldsymbol{\theta}$ の十分統計量であるとする.

任意の $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$ に対して, $\mathrm{E}_{\boldsymbol{\theta}}\{g(T(\boldsymbol{X}))\} = 0 \Rightarrow$ 確率 *1* で $g(T(\boldsymbol{X})) = 0$

が成り立つとき T は完備であるという.

十分統計量 (6,7,8/8)

定理 7.6 (完備十分統計量と一様最小分散不偏推定量)

$\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)' \sim \mathrm{P}$, $\mathrm{P} \in \mathcal{P} = \{\mathrm{P}_{\boldsymbol{\theta}};\ \boldsymbol{\theta} \in \Theta\}$
$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{X})$: $\boldsymbol{\theta}$ の完備十分統計量

$\hat{\gamma}(\boldsymbol{T})$ が $\gamma(\boldsymbol{\theta})$ の不偏推定量
$\Rightarrow \quad \hat{\gamma}(\boldsymbol{T})$ は一様最小分散不偏推定量

例 7.1

$X_1, \ldots, X_n$ を正規母集団 $N(\mu, \sigma^2)$ からのランダム標本とする.

$$S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2 = \frac{1}{n-1}(T_1 - nT_2)$$

は, σ^2 の一様最小分散不偏推定量であるが, 有効推定量ではない.

最尤法

最尤法 (1/6)

定義 7.4

$f(\boldsymbol{x})$: $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)'$ の確率密度関数
確率密度関数 $g(\boldsymbol{x})$ に対して

$$\mathrm{KL}(f; g) = -\mathsf{E}\left\{\log \frac{g(\boldsymbol{X})}{f(\boldsymbol{X})}\right\}$$

を g の f からのカルバック－ライブラーの擬距離とよぶ.

補題 7.1

任意の g に対して, $\mathrm{KL}(f; g) \geq 0$ が成り立ち, 等号は確率 1 で $f(\boldsymbol{X}) = g(\boldsymbol{X})$ のときに限る.
(証明は板書で)

最尤法 (2/6)

$X_1, \ldots, X_n \overset{i.i.d.}{\sim} f(x; \boldsymbol{\theta}_0)$, $\boldsymbol{\theta}_0 \in \Theta \subset \mathbb{R}^p$

(仮定 A0) $\boldsymbol{\theta} \neq \boldsymbol{\theta}'$ ならば $\mathrm{P}(f(X; \boldsymbol{\theta}) \neq f(X; \boldsymbol{\theta}')) > 0$.

大数の強法則から

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \log \frac{f(X_i; \boldsymbol{\theta})}{f(X_i; \boldsymbol{\theta}_0)} \overset{a.s.}{\to} -\mathrm{KL}(f(*; \boldsymbol{\theta}_0); f(*; \boldsymbol{\theta})) \quad (n \to \infty)$$

である.

補題 7.1 より 右辺は $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_0$ で最大値をとる.

左辺を最大とする $\boldsymbol{\theta} = \hat{\boldsymbol{\theta}}(X_1, \ldots, X_n)$ は,
$n \to \infty$ のとき θ_0 に収束 (A0 以外にも条件が必要)

最尤法 (3/6)

尤度関数

標本変量 $\boldsymbol{X} = (X_1, \dots X_n)'$ に対する統計モデルを

$$\mathrm{P}(\boldsymbol{X} \in A) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{\boldsymbol{x} \in A} f(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{\theta}), & \boldsymbol{X} \text{ が離散型の場合} \\ \displaystyle\int_{\boldsymbol{x} \in A} f(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{\theta}) d\boldsymbol{x}, & \boldsymbol{X} \text{ が連続型の場合} \end{cases}$$

とする．ここに, $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$. 確率密度関数 $f(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{\theta})$ を ($\boldsymbol{x}$ を固定して) $\boldsymbol{\theta}$ の関数とみなすとき

$$L(\boldsymbol{\theta}; \boldsymbol{x}) \quad (= f(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{\theta}) \ ) \tag{1}$$

と表し, 尤度関数とよぶ.

最尤法 (4/6)

定義 7.5 (最尤推定量)

尤度関数 $L(\boldsymbol{\theta}; \boldsymbol{x})$ の最大を実現する $\boldsymbol{\theta}$ を $\hat{\boldsymbol{\theta}} = \hat{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{x})$ と表し, $\boldsymbol{\theta}$ の最尤推定値という.

$$L(\hat{\boldsymbol{\theta}}; \boldsymbol{x}) = \sup_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta} L(\boldsymbol{\theta}; \boldsymbol{x}).$$

$\hat{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{X})$ を $\boldsymbol{\theta}$ の最尤推定量という.

対数尤度 $\log L(\boldsymbol{\theta}; \boldsymbol{x})$ を $\ell(\boldsymbol{\theta}; \boldsymbol{x})$ と表す. 多くの場合, 最尤推定値は尤度方程式

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \ell(\boldsymbol{\theta}; \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$$

の解として与えられる.

最尤法 (5/6)

例 7.7

(1) $X_1, \ldots, X_n \overset{i.i.d.}{\sim} B(1, \theta)$, $\theta \in (0, 1)$

尤度関数: $L(\theta; \boldsymbol{x}) = \theta^{\sum_{i=1}^n x_i}(1-\theta)^{n-\sum_{i=1}^n x_i}$

最尤推定値: $\hat{\theta} = \bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + \cdots + x_n)$

(2) $X_1, \ldots, X_n \overset{i.i.d.}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$, $\boldsymbol{\theta} = (\mu, \sigma^2)'$

尤度関数: $L(\boldsymbol{\theta}; \boldsymbol{x}) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2\right\}$

最尤推定値: $\hat{\mu} = \bar{x}, \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$

(3) $X_1, \ldots, X_n \overset{i.i.d.}{\sim} U(0, \theta)$

尤度関数: $L(\theta, x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{\theta^n}, \ 0 < x_i \leq \theta, \ \theta \in \Theta = (0, \infty)$

最尤推定値:$\hat{\theta} = \max_{i=1,\ldots,n} x_i$

最尤法 (6/6)

最尤推定量の性質

(i) 不偏性
$\mathrm{E}(\hat{\theta}) = \theta$

(ii) 一致性
$\hat{\theta} \xrightarrow{p} \theta \quad (n \to \infty)$

(iii) 漸近正規性
標準化すると $n \to \infty$ のとき正規分布に分布収束する性質

例 7.8

	不偏性	一致性	漸近正規性
例 7.7(1)	○	○	○
例 7.7(2)$\hat{\mu}$	○	○	○
例 7.7(2)$\hat{\sigma}^2$	×	○	○
例 7.7(3)	×	○	×

信頼区間

信頼区間 (1/7)

例 7.10 (母平均の信頼区間)

$X_1, \dots, X_n \overset{i.i.d}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$,
μ : 未知, σ^2 : 既知

$$\hat{\mu} = \bar{X}_n \sim N\left(\mu, \sigma^2/n\right), \text{ したがって } \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1).$$

$$\mathrm{P}\left(-2 < \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} < 2\right) = 0.954$$

確率の括弧内は

$$-2 < \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} < 2 \iff \bar{X}_n - \frac{2\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X}_n + \frac{2\sigma}{\sqrt{n}}$$

と表せる.

信頼区間 (2/7)

例 7.10 (母平均の信頼区間 (続き))

区間

$$\left[\bar{X}_n - \frac{2\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{X}_n + \frac{2\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

が μ を含む確率が 0.954 であるので, "μ の信頼係数 0.954 の信頼区間" とよぶ.

信頼区間 (3/7)

定義 7.6

$\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)' \sim \mathsf{P}_\theta$, $\theta \in \Theta$
$\alpha \in [0, 1]$
$T_1(\boldsymbol{X})$, $T_2(\boldsymbol{X})$ $\quad (T_1 \le T_2)$: 統計量

$$\mathsf{P}_\theta(T_1(\boldsymbol{X}) \le \theta \le T_2(\boldsymbol{X})) \ge 1 - \alpha \quad (\forall \theta \in \Theta)$$

を満たすとき, 区間 $[T_1, T_2]$ を水準 $1 - \alpha$ の信頼区間, あるいは 水準 $100 \times (1 - \alpha)$%の信頼区間という.

$$\inf_{\theta \in \Theta} \mathsf{P}_\theta(T_1(\boldsymbol{X}) \le \theta \le T_2(\boldsymbol{X})) = 1 - \alpha$$

のとき, 区間 $[T_1, T_2]$ を信頼係数 $1 - \alpha$ の信頼区間, あるいは $100 \times (1 - \alpha)$%信頼区間という.

信頼区間 (4/7)

例 7.11 (例 7.10 で σ^2 も未知の場合)

$$\sigma^2 \quad \Rightarrow \quad S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(X_j - \bar{X}_n)^2$$

$$T = \frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{S_n} \sim t_{n-1}$$

となる (定理 6.9)
Ψ_{n-1} : 自由度 $n-1$ の t-分布の分布関数
$t_{n-1}(\alpha)$: $1 - \Psi_{n-1}(t) = \alpha$ となる t の値
自由度 $n-1$ の t 分布の上側 α と呼ぶ.

$$\Rightarrow \quad \mathrm{P}\left(|T| \le t_{n-1}(\alpha/2)\right) = 1 - \alpha$$

信頼区間 (5/7)

例 7.11 (続き)

$$\left[\bar{X}_n - t_{n-1}(\alpha/2)\frac{S}{\sqrt{n}},\ \bar{X}_n + t_{n-1}(\alpha/2)\frac{S}{\sqrt{n}}\right]$$

は μ の信頼係数 $1-\alpha$ の信頼区間である.

信頼区間 (6/7)

例 (正規母集団でない場合)

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{S_n} \xrightarrow{d} N(0,1) \quad \text{(定理 6.3(3))}$$

$z_{\alpha/2}$: 標準正規分布の上側 $\alpha/2$ 点 $\big(1 - \Phi(z_{\alpha/2}) = \alpha/2\big)$

$$\mathsf{P}\left(\bar{X}_n - z_{\alpha/2}\frac{S_n}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{X}_n + z_{\alpha/2}\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right) \to 1 - \alpha \ (n \to \infty)$$

信頼区間 (7/7)

例 7.12 (２項分布)

$X_1, \ldots, X_n \overset{i.i.d.}{\sim} B(1, p)$

$$\hat{p} = \frac{1}{n} S_n, \quad S_n = \sum_{j=1}^{n} X_j \sim B(n, p)$$

$$Z_n = \frac{\sqrt{n}(\hat{p} - p)}{\sqrt{\hat{p}(1 - \hat{p})}} \xrightarrow{d} N(0, 1) \quad (n \to \infty)$$

p の信頼係数 $1 - \alpha$ の近似的な信頼区間

$$\left[\hat{p} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1 - \hat{p})}{n}},\ \hat{p} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1 - \hat{p})}{n}}\right]$$