確率・統計 B
推定・仮説検定

若木宏文

wakaki@math.sci.hiroshima-u.ac.jp

2014.01.15

table of contents

復習

最尤法 (4/6)

定義 7.5 (最尤推定量)

尤度関数 $L(\boldsymbol{\theta}; \boldsymbol{x})$ の最大を実現する $\boldsymbol{\theta}$ を $\hat{\boldsymbol{\theta}} = \hat{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{x})$ と表し, $\boldsymbol{\theta}$ の最尤推定値という.

$$L(\hat{\boldsymbol{\theta}}; \boldsymbol{x}) = \sup_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta} L(\boldsymbol{\theta}; \boldsymbol{x}).$$

$\hat{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{X})$ を $\boldsymbol{\theta}$ の最尤推定量という.

対数尤度 $\log L(\boldsymbol{\theta}; \boldsymbol{x})$ を $\ell(\boldsymbol{\theta}; \boldsymbol{x})$ と表す. 多くの場合, 最尤推定値は尤度方程式

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \ell(\boldsymbol{\theta}; \boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$$

の解として与えられる.

最尤法 (5/6)

例 7.7

(1) $X_1, \ldots, X_n \overset{i.i.d.}{\sim} B(1, \theta)$, $\theta \in (0, 1)$

尤度関数: $L(\theta; \boldsymbol{x}) = \theta^{\sum_{i=1}^n x_i}(1-\theta)^{n-\sum_{i=1}^n x_i}$

最尤推定値: $\hat{\theta} = \bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + \cdots + x_n)$

(2) $X_1, \ldots, X_n \overset{i.i.d.}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$, $\boldsymbol{\theta} = (\mu, \sigma^2)'$

尤度関数: $L(\boldsymbol{\theta}; \boldsymbol{x}) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2\right\}$

最尤推定値: $\hat{\mu} = \bar{x}, \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$

(3) $X_1, \ldots, X_n \overset{i.i.d.}{\sim} U(0, \theta)$

尤度関数: $L(\theta, x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{\theta^n},\ 0 < x_i \leq \theta,\ \theta \in \Theta = (0, \infty)$

最尤推定値:$\hat{\theta} = \max_{i=1,\ldots,n} x_i$

最尤法 (6/6)

最尤推定量の性質

(i) 不偏性
$\mathrm{E}(\hat{\theta}) = \theta$

(ii) 一致性
$\hat{\theta} \xrightarrow{p} \theta \quad (n \to \infty)$

(iii) 漸近正規性
標準化すると $n \to \infty$ のときき正規分布に分布収束する性質

例 7.8

	不偏性	一致性	漸近正規性
例 7.7(1)	○	○	○
例 7.7(2)$\hat{\mu}$	○	○	○
例 7.7(2)$\hat{\sigma}^2$	×	○	○
例 7.7(3)	×	○	×

信頼区間

信頼区間 (1/7)

例 7.10 (母平均の信頼区間)

$X_1, \ldots, X_n \overset{i.i.d}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$,
μ : 未知, σ^2 : 既知

$$\hat{\mu} = \bar{X}_n \sim N\left(\mu, \sigma^2/n\right), \text{ したがって } \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1).$$

$$\mathrm{P}\left(-2 < \tfrac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} < 2\right) = 0.954$$

確率の括弧内は

$$-2 < \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} < 2 \iff \bar{X}_n - \frac{2\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X}_n + \frac{2\sigma}{\sqrt{n}}$$

と表せる.

信頼区間 (2/7)

例 7.10 (母平均の信頼区間 (続き))

区間

$$\left[\bar{X}_n - \frac{2\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{X}_n + \frac{2\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

が μ を含む確率が 0.954 であるので, "μ の信頼係数 0.954 の信頼区間" とよぶ.

信頼区間 (3/7)

定義 7.6

$\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)' \sim \mathsf{P}_\theta$, $\theta \in \Theta$
$\alpha \in [0, 1]$
$T_1(\boldsymbol{X})$, $T_2(\boldsymbol{X}) \quad (T_1 \le T_2)$: 統計量

$$\mathsf{P}_\theta(T_1(\boldsymbol{X}) \le \theta \le T_2(\boldsymbol{X})) \ge 1 - \alpha \quad (\forall \theta \in \Theta)$$

を満たすとき, 区間 $[T_1, T_2]$ を水準 $1 - \alpha$ の信頼区間,
あるいは 水準 $100 \times (1 - \alpha)$%の信頼区間という.

$$\inf_{\theta \in \Theta} \mathsf{P}_\theta(T_1(\boldsymbol{X}) \le \theta \le T_2(\boldsymbol{X})) = 1 - \alpha$$

のとき, 区間 $[T_1, T_2]$ を信頼係数 $1 - \alpha$ の信頼区間,
あるいは $100 \times (1 - \alpha)$%信頼区間という.

信頼区間 (4/7)

例 7.11 (例 7.10 で σ^2 も未知の場合)

$$\sigma^2 \quad \Rightarrow \quad S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(X_j - \bar{X}_n)^2$$

$$T = \frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{S_n} \sim t_{n-1}$$

となる (定理 6.9)

Ψ_{n-1} : 自由度 $n-1$ の t-分布の分布関数

$t_{n-1}(\alpha)$: $1 - \Psi_{n-1}(t) = \alpha$ となる t の値

自由度 $n-1$ の t 分布の上側 α 点 と呼ぶ.

$$\Rightarrow \quad \mathsf{P}\left(|T| \le t_{n-1}(\alpha/2)\right) = 1 - \alpha$$

信頼区間 (5/7)

例 7.11 (続き)

$$\left[\bar{X}_n - t_{n-1}(\alpha/2)\frac{S}{\sqrt{n}},\ \bar{X}_n + t_{n-1}(\alpha/2)\frac{S}{\sqrt{n}}\right]$$

は μ の信頼係数 $1-\alpha$ の信頼区間である.

信頼区間 (6/7)

例 (正規母集団でない場合)

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{S_n} \xrightarrow{d} N(0,1) \quad \text{(定理 6.3(3))}$$

$z_{\alpha/2}$: 標準正規分布の上側 $\alpha/2$ 点 $\left(1 - \Phi(z_{\alpha/2}) = \alpha/2\right)$

$$\mathsf{P}\left(\bar{X}_n - z_{\alpha/2}\frac{S_n}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X}_n + z_{\alpha/2}\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right) \to 1 - \alpha \ (n \to \infty)$$

信頼区間 (7/7)

例 7.12 (２項分布)

$X_1, \ldots, X_n \overset{i.i.d.}{\sim} B(1, p)$

$$\hat{p} = \frac{1}{n} S_n, \quad S_n = \sum_{j=1}^{n} X_j \sim B(n, p)$$

$$Z_n = \frac{\sqrt{n}(\hat{p} - p)}{\sqrt{\hat{p}(1 - \hat{p})}} \xrightarrow{d} N(0, 1) \quad (n \to \infty)$$

p の信頼係数 $1 - \alpha$ の近似的な信頼区間

$$\left[\hat{p} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1 - \hat{p})}{n}},\ \hat{p} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1 - \hat{p})}{n}}\right]$$

仮説検定とは

仮説検定とは (1/18)

例 8.1

問題：開発中の牛の飼料 A が従来の飼料 B より優れているかどうか判定したい

データ：月例、体重がほぼ同じ牛 n 頭に飼料 A を与え，1 ヶ月後の体重増加量を測定

$\bar{y}$：n 頭の平均体重増加量

μ_0：飼料 B を 1 ヶ月与えたときの平均体重増加量

$\bar{y} - \mu_0$ がどれぐらい大きければ,
飼料 A は 飼料 B より優れていると
判定してよいか？

仮説検定とは (2/18)

例 8.1 (続き)

統計モデル

n 頭の牛を, 大きな母集団からの標本と考える

体重増加量 Y の母集団分布を正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ と仮定する

n 頭の体重増加量 $(y_1, \ldots, y_n)$：ランダム標本 $Y_1, \ldots, Y_n$ の実現値

仮説検定問題

データ $y_1, \ldots, y_n$ に基づいて, 2 つの仮説：

H_1 : 飼料 A が飼料 B より優れていない $(\mu \leq \mu_0)$,
H_2 : 飼料 A が飼料 B より優れている $(\mu > \mu_0)$

のどちらが正しいか判定する問題

(厳密には, H_1 が正しくないと言えるかどうかを判定する)

仮説検定とは (3/18)

例 8.1 (続き)

検定の考え方

$\bar{y}-\mu_0$ の値が大きいほど仮説 H_1 は疑わしい.
$\Rightarrow \quad \bar{y}-\mu_0 > d$ のとき, H_1 は正しくないと判定する.

- d の値をどう決めればよいか？
- $\mu-\mu_0$ が大きくても, d をどのように決めても, $\bar{Y}-\mu_0 \leq d$ となる確率は 0 ではない.
- 例えば, $\bar{y}-\mu_0 = 0.3(\mathrm{kg})$ としても n や σ の値によって疑わしさの度合いが異なる.

仮説検定とは (4/18)

例 8.1 (続き)

疑わしさの度合い

H_1 が正しくて, $\mu = \mu_0$ であったとする

$$
\begin{aligned}
&Z = \frac{\sqrt{n}(\bar{Y} - \mu_0)}{\sigma} \sim N(0,1) \\
&\mathrm{P}(\bar{Y} - \mu_0 > d) = \mathrm{P}\left(Z > \frac{\sqrt{n}d}{\sigma}\right) \\
&n = 16, \sigma = 10.0 \Rightarrow \mathrm{P}(\bar{Y} - \mu_0 > 0.3) = \mathrm{P}(Z > 0.12) \approx 0.452 \\
&n = 64, \sigma = 2 \Rightarrow \mathrm{P}(\bar{Y} - \mu_0 > 0.3) = \mathrm{P}(Z > 1.2) \approx 0.115
\end{aligned}
$$

実現値 $\bar{y}$ に対して,

$$
\mathrm{P}(\bar{Y} - \mu_0 > \bar{y} - \mu_0)
$$

を p-値 と呼び, 仮説 H_1 の疑わしさの尺度とする.

仮説検定とは (5/18)

例 8.1 (続き)

検定方法

小さな値 α を基準として, p-値が α より小さいとき
仮説 H_1 を正しくないと判定する.

α を **有意水準**といい, p-値が α より小さいとき,

「仮説 H_1 は**有意水準 α で有意である**」

という

仮説 $H_1 : \mu \le \mu_0$ をデータから否定することによって, 飼料 A は B より優れていることを主張しようとしている.

帰無仮説 : 否定の対象となる仮説

棄却する : 仮説を正しくないと判定すること

対立仮説 : 帰無仮説が棄却されるとき, 支持されるもう一方の仮説

仮説検定とは (6/18)

母平均に関する検定

$X_1, \ldots, X_n$：母集団分布 P からのランダム標本
μ：母平均 ($\mathrm{E}(X_i) = \mu$)
σ^2：母分散 ($\mathrm{Var}(X_i) = \sigma^2$)

母平均が特定の値 μ_0 に等しいかどうかを検定したいとする.

$$\text{帰無仮説 } H_0 : \mu = \mu_0, \quad \text{対立仮説 } H_1 : \mu \neq \mu_0$$

帰無仮説 $H_0 : \mu = \mu_0$ に対しても, 対立仮説を $H_1 : \mu > \mu_0$, あるいは $H_1 : \mu < \mu_0$ のどちらか一方を考えることがある. このような検定を片側検定, 対立仮説として $H_1 : \mu \neq \mu_0$ を考えたものを両側検定という.

仮説検定とは (7/18)

正規母集団, 分散が既知の場合
(両側検定)
$|\bar{X}_n - \mu_0|$ の値が大きい程 帰無仮説 $H_0 : \mu = \mu_0$ は疑わしい
帰無仮説 H_0 が正しいとすると

$$Z = \frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu_0)}{\sigma} \sim N(0,1)$$

であるので, 標本平均の実現値が $\bar{x}_n$ であったとき, p-値は

$$z = \frac{\sqrt{n}(\bar{x}_n - \mu_0)}{\sigma}$$

として

$$\mathrm{P}(|Z| > |z|) = 2\mathrm{P}(Z > |z|) = 2\{1 - \Phi(|z|)\}$$

仮説検定とは (8/18)

p-値 $< \alpha$ となる z の範囲は標準正規分布の上側 $\alpha/2$ 点を $z_{\alpha/2}$ とすると $|z| > z_{\alpha/2}$

$$\left| \frac{\sqrt{n}(\bar{x}_n - \mu_0)}{\sigma} \right| > z_{\alpha/2}$$

のとき, 帰無仮説 $H_0 : \mu = \mu_0$ を棄却する検定を

有意水準 α の両側検定

という.

仮説検定とは (9/18)

(片側検定)

$$\text{帰無仮説}\ H_0 : \mu = \mu_0, \quad \text{対立仮説}\ H_1 : \mu > \mu_0$$

実現値

$$z = \frac{\sqrt{n}(\bar{x}_n - \mu_0)}{\sigma}$$

が大きい程, 帰無仮説は疑わしいので p-値は $\mathrm{P}(Z > z) = 1 - \Phi(z)$

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{x}_n - \mu_0)}{\sigma} > z_\alpha$$

のとき, 帰無仮説 $H_0 : \mu = \mu_0$ を棄却する検定を

有意水準 α の片側検定

という.

仮説検定とは (10/18)

$$\text{帰無仮説 } H_0 : \mu = \mu_0, \quad \text{対立仮説 } H_1 : \mu < \mu_0$$

に対しては,

$$z = \frac{\sqrt{n}(\bar{x}_n - \mu_0)}{\sigma}$$

が負で, その絶対値が大きい程, 帰無仮説が疑わしいので,
有意水準 α の片側検定は

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{x}_n - \mu_0)}{\sigma} < -z_\alpha$$

のとき, H_0 を棄却する.

仮説検定とは (11/18)

正規母集団, 分散が未知の場合

σ^2 を 標本分散 $S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2$ で推定する.
帰無仮説 H_0 が正しいとすると

$$T = \frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu_0)}{S_n} \sim t_{n-1} \text{ (自由度 } n-1 \text{ の t 分布)}$$

T の実現値を

$$t = \frac{\sqrt{n}(\bar{x}_n - \mu_0)}{s_n}$$

とおくと, 両側対立仮説 $H_1 : \mu \neq \mu_0$ に対しては, $|t|$ が大きい程,
帰無仮説は疑わしい.

仮説検定とは (12/18)

自由度 $n-1$ の t 分布の上側 α 点を $t_{n-1}(\alpha)$ と書くと
有意水準 α の両側検定は

$$\left|\frac{\sqrt{n}(\bar{x}_n-\mu_0)}{s_n}\right| > t_{n-1}(\alpha/2)$$

のとき, H_0 を棄却する.

t 分布を用いたこの検定を t 検定とよぶ.

仮説検定とは (13/18)

片側対立仮説 $H_1 : \mu > \mu_0$ に対して有意水準 α の検定は

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{x}_n - \mu_0)}{s_n} > t_{n-1}(\alpha)$$

のとき, H_0 を棄却.

片側対立仮説 $H_1 : \mu < \mu_0$ に対して有意水準 α の検定は

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{x}_n - \mu_0)}{s_n} < -t_{n-1}(\alpha)$$

のとき, H_0 を棄却.

仮説検定とは (14/18)

母集団分布正規分布でない場合

$$T = \frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu_0)}{S_n}$$

の分布がわからないので, p-値が計算できないが, n が大きい場合には

$$T = \frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu_0)}{S_n} \xrightarrow{d} N(0, 1)$$

であるので, 近似的に有意水準が α の両側検定は,

$$\left| \frac{\sqrt{n}(\bar{x}_n - \mu_0)}{s_n} \right| > z_{\alpha/2}$$

のとき, H_0 を棄却

仮説検定とは (15/18)

片側対立仮説 $H_1 : \mu > \mu_0$ に対して近似的な有意水準 α の検定は

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{x}_n - \mu_0)}{s_n} > z_\alpha$$

のとき, H_0 を棄却.

片側対立仮説 $H_1 : \mu < \mu_0$ に対して近似的な有意水準 α の検定は

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{x}_n - \mu_0)}{s_n} < -z_\alpha$$

のとき, H_0 を棄却.

仮説検定とは (16/18)

例 8.2

a コインを 20 回投げたら, 表が 19 回出た. 表, 裏が出る確率が等しいかどうか判定したい.
20 回投げて表が出る回数を X とする

仮説検定問題

$X \sim B(20, p)$

$$\text{帰無仮説 } H_0 : p = 1/2, \quad \text{対立仮説 } H_1 : p \neq 1/2$$

仮説検定とは (17/18)

例 8.3

続き X の実現値を x とする

$\hat{p} = \dfrac{x}{20}$: p の推定量

$\left|\hat{p} - \dfrac{1}{2}\right|$ が大きいほど H_0 は疑わしいので $x = 19$ のときの p-値は

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}\left(\left|\frac{X}{20} - \frac{1}{2}\right| \geq \left|\frac{19}{20} - \frac{1}{2}\right|\right) &= \mathrm{P}(X \in \{0, 1, 19, 20\}) \\
&= ({}_{20}C_0 + {}_{20}C_1 + {}_{20}C_{19} + {}_{20}C_{20}) \left(\tfrac{1}{2}\right)^{20} \approx 0.00004
\end{aligned}
$$

有意水準 0.01 でも棄却される.

仮説検定とは (18/18)

$X \sim B(n, p)$

$$\text{帰無仮説 } H_0 : p = p_0 \quad \text{対立仮説 } H_1 : p \neq p_0$$

帰無仮説 H_0 が正しいとすると

$$Z = \frac{X - p_0}{\sqrt{np_0(1 - p_0)}} \xrightarrow{d} N(0, 1) \quad (n \to \infty)$$

なので, n が大きいとき, 近似的な有意水準 α の検定は

$$\frac{|x - p_0|}{\sqrt{np_0(1 - p_0)}} > z_{\alpha/2} \quad \Rightarrow \quad \text{棄却}$$

一様最強力検定