確率・統計B
推定・仮説検定

若木宏文

wakaki@math.sci.hiroshima-u.ac.jp

2014.01.22

table of contents

復習

仮説検定とは (4, 5/18)

帰無仮説：否定の対象となる仮説

対立仮説：帰無仮説が棄却されるとき, 支持されるもう一方の仮説

棄却する：仮説を正しくないと判定すること

p-値：帰無仮説の疑わしさの度合いを確率で表したもの

有意水準：p-値によって帰無仮説を棄却するときの基準値

検定方法

$$\text{p-値} < \text{有意水準} \Rightarrow \text{帰無仮説を棄却}$$

仮説検定とは (6/18)

母平均に関する検定

$X_1, \ldots, X_n$: 母集団分布 P からのランダム標本
　μ : 母平均 (E$(X_i) = \mu$)
　σ^2 : 母分散 (Var$(X_i) = \sigma^2$)

両側検定 : 帰無仮説 $H_0 : \mu = \mu_0$,　対立仮説 $H_1 : \mu \neq \mu_0$
片側検定 : 帰無仮説 $H_0 : \mu = \mu_0$,　対立仮説 $H_1 : \mu > \mu_0$
片側検定 : 帰無仮説 $H_0 : \mu = \mu_0$,　対立仮説 $H_1 : \mu < \mu_0$

仮説検定とは (7,8/18)

正規母集団, 分散が既知の場合

(有意水準 α の 両側検定)

$|\bar{X}_n - \mu_0|$ の値が大きい程 帰無仮説 $H_0 : \mu = \mu_0$ は疑わしい

$z_{\alpha/2}$: 標準正規分布の上側 $\alpha/2$ 点 ($\Phi(z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$)

$$\left| \frac{\sqrt{n}(\bar{x}_n - \mu_0)}{\sigma} \right| > z_{\alpha/2} \quad \Rightarrow \quad \text{帰無仮説 } H_0 : \mu = \mu_0 \text{ 棄却}$$

仮説検定とは (9,10/18)

(有意水準 α の 片側検定 ($H_1 : \mu > \mu_0$))
$\bar{X}_n - \mu_0$ の値が大きい程 帰無仮説 $H_0 : \mu = \mu_0$ は疑わしい
z_α : 標準正規分布の上側 α 点 ($\Phi(z_\alpha) = 1 - \alpha$)

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{x}_n - \mu_0)}{\sigma} > z_\alpha \quad \Rightarrow \quad \text{帰無仮説 } H_0 : \mu = \mu_0 \text{ 棄却}$$

(有意水準 α の 片側検定 ($H_1 : \mu < \mu_0$))
$\bar{X}_n - \mu_0 < 0$ で絶対値が大きい程 帰無仮説 $H_0 : \mu = \mu_0$ は疑わしい

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{x}_n - \mu_0)}{\sigma} < -z_\alpha \quad \Rightarrow \quad \text{帰無仮説 } H_0 : \mu = \mu_0 \text{ 棄却}$$

仮説検定とは (11,12/18)

正規母集団, 分散が未知の場合

$S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2$

$t_{n-1}(\alpha)$: 自由度 $n-1$ の t 分布の上側 α 点

有意水準 α の両側検定 (t-検定)

$$\left|\frac{\sqrt{n}(\bar{x}_n - \mu_0)}{s_n}\right| > t_{n-1}(\alpha/2) \quad \Rightarrow \quad \text{帰無仮説 } H_0 : \mu = \mu_0 \text{ 棄却}$$

仮説検定とは (13/18)

有意水準 α の片側検定 ($H_1 : \mu > \mu_0$)

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{x}_n - \mu_0)}{s_n} > t_{n-1}(\alpha) \quad \Rightarrow \quad \text{帰無仮説 } H_0 : \mu = \mu_0 \text{ 棄却}$$

有意水準 α の片側検定 ($H_1 : \mu < \mu_0$)

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{x}_n - \mu_0)}{s_n} < -t_{n-1}(\alpha) \quad \Rightarrow \quad \text{帰無仮説 } H_0 : \mu = \mu_0 \text{ 棄却}$$

仮説検定とは (14,15/18)

母集団分布正規分布でなく, n が大きい場合

近似的に有意水準が α の両側検定

$$\left|\frac{\sqrt{n}(\bar{x}_n - \mu_0)}{s_n}\right| > z_{\alpha/2} \quad \Rightarrow \quad \text{帰無仮説 } H_0 : \mu = \mu_0 \text{ 棄却}$$

近似的に有意水準 α の片側検定 $(H_1 : \mu > \mu_0)$

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{x}_n - \mu_0)}{s_n} > z_{\alpha} \quad \Rightarrow \quad \text{帰無仮説 } H_0 : \mu = \mu_0 \text{ 棄却}$$

近似的に有意水準 α の片側検定 $(H_1 : \mu < \mu_0)$

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{x}_n - \mu_0)}{s_n} < -z_{\alpha} \quad \Rightarrow \quad \text{帰無仮説 } H_0 : \mu = \mu_0 \text{ 棄却}$$

仮説検定とは (18/18)

$X \sim B(n, p)$

$$\text{帰無仮説 } H_0 : p = p_0 \quad \text{対立仮説 } H_1 : p \neq p_0$$

帰無仮説 H_0 が正しいとすると

$$Z = \frac{X - p_0}{\sqrt{np_0(1-p_0)}} \xrightarrow{d} N(0,1) \quad (n \to \infty)$$

なので, n が大きいとき, 近似的な有意水準 α の検定は

$$\frac{|x - p_0|}{\sqrt{np_0(1-p_0)}} > z_{\alpha/2} \quad \Rightarrow \quad \text{棄却}$$

一様最強力検定

一様最強力検定 (1/12)

一般的な仮説検定問題

$\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)' \sim \mathrm{P}$, $\mathrm{P} \in \mathcal{P} = \{\mathrm{P}_\theta;\ \theta \in \Theta\}$

帰無仮説 $H_0 : \theta \in \Theta_0$,　対立仮説 $H_1 : \theta \in \Theta_1$

$(\Theta_0 \subset \Theta, \Theta_1 \subset \Theta,\ \Theta_0 \cap \Theta_1 = \emptyset)$

単純仮説：仮説で指定されるパラメータの値が 1 個の場合
$(H_0 : \theta = \theta_0,\quad \Theta_0 = \{\theta_0\})$

複合仮説：単純仮説でない仮説

棄却域：ある検定方法を定めたとき, その検定方法によって帰無仮説が棄却されるような実現値の全体からなる集合.

例. 母平均に関する有意水準 α の両側 t 検定の棄却域

$$\left\{(x_1, \ldots, x_n)';\ \left|\frac{\sqrt{n}(\bar{x}_n - \mu_0)}{s_n}\right| > z_{\alpha/2}\right\}$$

一様最強力検定 (2/12)

検定方法と棄却域の対応

$\mathcal{W} \subset \mathbb{R}^n$ と, $\boldsymbol{X}$ の実現値 $\boldsymbol{x}$ に対して

$$\begin{cases} \boldsymbol{x} \in \mathcal{W} & \Rightarrow \quad \text{帰無仮説 } H_0 \text{ を棄却} \\ \boldsymbol{x} \notin \mathcal{W} & \Rightarrow \quad \text{帰無仮説 } H_0 \text{ を棄却しない} \end{cases}$$

という検定方法を考えると, この検定方法の棄却域は $\mathcal{W}$ となる.

棄却域 $\mathcal{W}$ をどのように定めればよいか？

一様最強力検定 (3/12)

2 種類の過誤と過誤確率

$\mathcal{W}$ をある検定の棄却域とする

第 1 種の過誤 帰無仮説 H_0 が正しいのに, H_0 を棄却する誤り

$$\mathrm{P}(\boldsymbol{X} \in \mathcal{W} \,|\, \theta \in \Theta_0)$$

第 2 種の過誤 帰無仮説 H_0 が正しくないのに, H_0 を棄却しない誤り

$$\mathrm{P}(\boldsymbol{X} \notin \mathcal{W} \,|\, \theta \in \Theta_1)$$

$$\mathcal{W} \supset \mathcal{W}_1 \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{c} \mathrm{P}(\mathcal{W} \,|\, \Theta_0) \geq \mathrm{P}(\mathcal{W}_1 \,|\, \Theta_0) \\ \text{であるが} \\ \mathrm{P}(\mathcal{W} \,|\, \Theta_1) \leq \mathrm{P}(\mathcal{W}_1 \,|\, \Theta_1) \end{array}$$

一様最強力検定 (4/12)

$\beta(\theta) = \mathsf{P}(\mathcal{W} \,|\, \theta)$ とおくとき

$$\sup_{\theta\in\Theta_0} \beta(\theta) \leq \alpha$$

であるような検定を, 有意水準 α の検定という

最適化問題

有意水準 α の検定の中で, 第 2 種の過誤確率を最小にしたい
有意水準 α の検定の中で, $\beta(\theta)$ $(\theta \in \Theta_1)$ を最大にする.

$\beta(\theta)$ $(\theta \in \Theta_1)$ を 検出力 (関数) という

一様最強力検定 (5/12)

単純仮説同志の検定

(∗)　帰無仮説 $H_0 : \theta = \theta_0$,　対立仮説 $H_1 : \theta = \theta_1$　$\theta_0 \neq \theta_1$

$\beta(\theta_0) \leq \alpha$ の条件下で $\beta(\theta_0)$ を最大にしたい

定理 8.1 (ネイマン－ピアソンの基本定理)

$\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)'$: n 次元確率変数
$f(\boldsymbol{x}, \theta)$: その確率密度関数

$$\mathcal{W}_c = \{\boldsymbol{x};\ f(\boldsymbol{x}, \theta_1) \geq c\ f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\theta_0})\}$$

を棄却域とする検定は, 有意水準が $\alpha = \mathrm{P}(\mathcal{W}_c \,|\, \theta_0)$ である (∗) の検定の中で, 検出力 $\beta(\theta_1)$ を最大にする.
(証明は板書で)

一様最強力検定 (6/12)

定義 8.1 (最強力検定)

定理 8.1 の検定を最強力検定という

例 8.6

$X_1, \ldots, X_n \overset{i.i.d.}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$ (σ^2 : 既知)
$\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)'$ の確率密度関数 :

$$f(\boldsymbol{x}, \mu) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} \exp\left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{j=1}^{n} (x_j - \mu)^2 \right\}$$

$$= \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} \exp\left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} A(\boldsymbol{x}) \right\} \exp\left\{ -\frac{n}{2\sigma^2} (\bar{x} - \mu)^2 \right\},$$

$$A(\boldsymbol{x}) = \sum_{j=1}^{n} (x_j - \bar{x})^2, \quad \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} x_j$$

一様最強力検定 (7/12)

例 8.6 (続き)

検定問題

(∗) 帰無仮説 $H_0 : \mu = \mu_0$, 対立仮説 $H_1 : \mu = \mu_1 \quad (\mu_0 < \mu_1)$

有意水準 α の最強力検定

$$\frac{f(\boldsymbol{x};\ \mu_1)}{f(\boldsymbol{x};\ \mu_0)} = \exp\left\{ \frac{n}{\sigma^2}(\mu_1 - \mu_0)\bar{x} + \frac{n}{2\sigma^2}(\mu_0^2 - \mu_1^2) \right\} > c$$

$$\Updownarrow$$

$$\bar{x} > d \quad (d \text{ は } n, \sigma^2, \mu_0, \mu_1 \text{ の関数 })$$

有意水準が $\alpha \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{P}(\bar{x} > d \,|\, \mu_0) = \alpha \quad \Leftrightarrow \quad d = \mu_0 + \frac{\sqrt{n}}{\sigma} z_\alpha$

最強力検定 : $\dfrac{\sqrt{n}(\bar{x} - \mu_0)}{\sigma} > z_\alpha \quad \Rightarrow \quad H_0$ を棄却

一様最強力検定 (8/12)

対立仮説が複合仮説の場合

(∗)　帰無仮説 $H_0 : \theta = \theta_0$,　対立仮説 $H_1 : \theta \in \Theta_1$　$\theta_0 \notin \Theta_1$

定義 8.2 (一様最強力検定)

(∗) の有意水準 α の検定について

$\beta_{\mathcal{W}}(\theta)$ $(\theta \in \Theta_1)$ を棄却域 $\mathcal{W}$ によって定まる検定の検出力とする.

任意の $\theta \in \Theta_1$ と, 任意の $\mathcal{W}$ に対して

$$\beta_{\mathcal{W}_o}(\theta) \geq \beta_{\mathcal{W}}(\theta)$$

を満たす $\mathcal{W}_o$ によって定まる検定を一様最強力検定という.

一様最強力検定 (9/12)

$\theta_a, \theta_b \in \Theta_1$

$H_a : \theta = \theta_a, \quad H_b : \theta = \theta_b$

$\mathcal{W}_a$: H_0 vs H_a に対する有意水準 α の最強力検定 (棄却域)

$\mathcal{W}_b$: H_0 vs H_b に対する有意水準 α の最強力検定 (棄却域)

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}(\boldsymbol{X} \in \mathcal{W}_a \,|\, \theta_0) &= \mathsf{P}(\boldsymbol{X} \in \mathcal{W}_b \,|\, \theta_0) = \alpha \\
\mathsf{P}(\boldsymbol{X} \in \mathcal{W}_a \,|\, \theta_a) &\geq \mathsf{P}(\boldsymbol{X} \in \mathcal{W}_b \,|\, \theta_a) \\
\mathsf{P}(\boldsymbol{X} \in \mathcal{W}_a \,|\, \theta_b) &\leq \mathsf{P}(\boldsymbol{X} \in \mathcal{W}_b \,|\, \theta_b)
\end{aligned}$$

$\{\boldsymbol{x};\ f(\boldsymbol{x}, \theta_a) > 0\} = \{\boldsymbol{x};\ f(\boldsymbol{x}, \theta_b) > 0\}$ を仮定すると,

$\geq$ または $\leq$ が等号となるための必要十分条件は $\mathcal{W}_a = \mathcal{W}_b$

一様最強力検定 (10/12)

命題 1

- $\theta_1 \in \Theta_1$ とするとき,
$$(**) \quad H_0 : \theta = \theta_0 \text{ vs } H_1' : \theta = \theta_1$$
に対する最強力検定 $\mathcal{W}'$ が θ_1 に依存しないならば,
$\mathcal{W}'$ は一様最強力検定となる.
- $\{\boldsymbol{x};\ f(\boldsymbol{x}, \theta) > 0\}$ が θ に依存しないとき,
$(**)$ の最強力検定が $\mathcal{W}'$ が θ_1 によって異なるならば
一様最強力検定は存在しない.

例 8.6 で求めた最強力検定は $\mu_1 > \mu_0$ である限り,
μ_1 の値には依存しないので,

$(*)$ 帰無仮説 $H_0 : \mu = \mu_0$, 対立仮説 $H_1 : \mu > \mu_0$

に対する有意水準 α の一様最強力検定である.

一様最強力検定 (11/12)

注 8.1 (不偏検定)

例 8.6 において,

(∗) 帰無仮説 $H_0 : \mu = \mu_0$, 対立仮説 $H_1 : \mu \neq \mu_0$

に対する一様最強力検定は存在しない.

例 8.6 の検定 (片側検定) の検出力は $\mu < \mu_0$ のとき α より小さくなる.

両側検定問題で片側検定を用いると, 対立仮説が正しい $(\mu < \mu_0)$ ときの方が, 帰無仮説が正しい $(\mu = \mu_0)$ ときよりも帰無仮説を棄却しにくいことになる.

対立仮説の下で, 検出力が常に有意水準以上であるような検定を不偏検定とよぶ.

一様最強力検定 (12/12)

定義 8.3 (一様最強力不偏検定)

対立仮説が複合仮説であるとき, 対立仮説に含まれる任意のパラメータの値に対して検出力が最大となる不偏検定法を,
一様最強力不偏検定とよぶ.

例 8.7

$X_1, \ldots, X_n \overset{i.i.d.}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$ (σ^2 : 既知)

(∗) 帰無仮説 $H_0 : \mu = \mu_0$, 対立仮説 $H_1 : \mu \neq \mu_0$

に対して,

$$\frac{\sqrt{n}|\bar{x} - \mu_0|}{\sigma} > z_{\alpha/2} \quad \Rightarrow \quad H_0 \text{ を棄却}$$

は有意水準 α の一様最強力不偏検定である.
(証明は省略, テキスト例 8.7 参照)