

確率・統計 B

確率変数と分布の収束

若木宏文

wakaki@math.sci.hiroshima-u.ac.jp

2013.10.9

table of contents

確率収束

概収束

分布収束

中心極限定理

漸近公式

確率収束 (1/6)

ベルヌーイ試行

条件 (1), (2), (3) をみたす n 回の繰り返し試行を,
成功率 p , 反復回数 n のベルヌーイ試行 とよぶ.

- (1) 各回の試行の結果は, A か A^c のどちらか一方しか起きない.
- (2) 各回の試行の結果は, 他の試行の結果と互いに独立である.
- (3) 事象 A が起こる確率 ($= p$) は毎回不変である.

成功率 p , 反復回数 n のベルヌーイ試行において,
事象 A が起こった回数を X とすると

$$X \sim B(n, p) \quad (\text{定理 2.8})$$

確率収束 (2/6)

例 5.1

サイコロを何度も振るとき **1 の目の** 出る比率は $1/6$ に近づく。
ベルヌーイ試行において、

$$X_n = \begin{cases} 1 & n \text{ 回目の試行で事象 } A \text{ が起こった} \\ 0 & n \text{ 回目の試行で事象 } A \text{ が起こらなかった} \end{cases}$$

とし、

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j \quad (A \text{ が起こる相対頻度})$$

とすると、 \bar{X}_n は $n \rightarrow \infty$ のとき、 $p = P(A)$ に近づく。

確率収束 (3/6)

- \bar{X}_n が p に近づくことの、定義は？
⇒ 確率収束, 概収束
- 近づくことの理論的な裏づけは？
⇒ 大数の法則
- 例えば, $n = 100, d = 0.1$ に対して, $P(|\bar{X}_n - p| \leq d)$ の値はどれ位？
⇒ 分布収束, 中心極限定理

確率収束 (4/6)

定義 5.1 (確率収束 (convergence in probability))

$\{X_n\}$: 確率変数列, θ : 定数, X : 確率変数

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - \theta| > \varepsilon) = 0$$

が成り立つとき, $\{X_n\}$ は θ に確率収束するといい,

$$X_n \xrightarrow{P} \theta \quad (n \rightarrow \infty)$$

とかく.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - X| > \varepsilon) = 0$$

が成り立つとき, $\{X_n\}$ は X に確率収束するといい,

$$X_n \xrightarrow{P} X \quad (n \rightarrow \infty)$$

とかく.

確率収束 (5/6)

定理 5.1 (大数の法則 (弱法則))

 $\{X_n\}$: 互いに独立な確率変数列,

$$E(X_n) = \mu, \text{Var}(X_n) = \sigma^2 \quad (n = 1, 2, \dots)$$

 \Rightarrow

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j \xrightarrow{p} \mu \quad (n \rightarrow \infty)$$

(証明は板書で)

例 5.1 の場合, $E(X_n) = p$, $\text{Var}(X_n) = p(1-p)$ だから

$$\bar{X}_n \xrightarrow{p} p \quad (n \rightarrow \infty)$$

確率収束 (6/6)

復習 (平均, 分散の性質, 不等式)

(1) $E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$.

(2) $X \leq Y \Rightarrow E(X) \leq E(Y)$.

(3) $\text{Var}(aX) = a^2\text{Var}(X)$.

(4) X と Y が独立 $\Rightarrow \text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y)$

(5) (チェビシェフの不等式) $E(X) = \mu, \text{Var}(X) = \sigma^2 < \infty$ ならば

$$P(|X - \mu| \geq k) \leq \sigma^2/k^2.$$

概収束 (1/6)

定義 5.3 (概収束 (almost surely convergence))

 $\{X_n\}$: 確率変数列, X : 確率変数 $P(\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X) = 1$, すなわち

$$\exists E \subset \Omega \text{ s.t. } P(E) = 0, \forall \omega \in \Omega_0 = \Omega - E \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = X(\omega)$$

が成り立つとき $\{X_n\}$ は X に概収束, または確率 1 で収束するといひ,

$$X_n \xrightarrow{a.s.} X \quad (n \rightarrow \infty)$$

とかく.

概収束 (2/6)

定理 (概収束と同値な条件 (定理 5.7, 注 5.10))

$$A_n(\varepsilon) = \{\omega \in \Omega ; |X_n(\omega) - X(\omega)| \leq \varepsilon\}$$

と定義すると次は同値

- (i) $X_n \xrightarrow{a.s.} X \quad (n \rightarrow \infty)$
- (ii) $\forall \varepsilon \ P(\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n(\varepsilon)) = 1$

概収束 (3/6)

証明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = X(\omega)$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists m \text{ s.t. } \forall n (n \geq m), |X_n(\omega) - X(\omega)| \leq \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \omega \in \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} A_n(\varepsilon) = \varliminf_{n \rightarrow \infty} A_n(\varepsilon)$$

$$\Leftrightarrow \omega \in \bigcap_{k=1}^{\infty} \left\{ \varliminf_{n \rightarrow \infty} A_n\left(\frac{1}{k}\right) \right\} \quad (\because \varepsilon > 1/k \Rightarrow A_n(\varepsilon) \supset A_n(1/k))$$

概収束 (4/6)

(i) \Rightarrow (ii)

$$\exists \Omega_0 \subset \Omega \text{ s.t. } P(\Omega_0) = 1, \omega \in \Omega_0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = X(\omega)$$

$$\Omega_0 \subset \bigcap_{k=1}^{\infty} \left\{ \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n\left(\frac{1}{k}\right) \right\} \subset \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n\left(\frac{1}{k}\right) \quad (k = 1, 2, \dots)$$

$$\forall k \ 1 = P(\Omega_0) \leq P(\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n(1/k))$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists k \text{ s.t. } \varepsilon > 1/k$$

$$\Rightarrow P(\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n(\varepsilon)) \geq P(\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n(1/k)) = 1$$

概収束 (5/6)

(ii) \Rightarrow (i) $A_{(k)} = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n(1/k)$ とおくと $\forall k \ P(A_{(k)}) = 1$ $A_{(k)} \supset A_{(k+1)}$ ($k = 1, 2, \dots$) であるから

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_{(k)}\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} P(A_{(k)}) = 1$$

$$\Omega_0 = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_{(k)} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \left\{ \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n\left(\frac{1}{k}\right) \right\} \text{ とおくと}$$

$$\omega \in \Omega_0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = X(\omega)$$

概収束 (6/6)

定理 5.8

$$X_n \xrightarrow{a.s.} X \quad (n \rightarrow \infty) \quad \Rightarrow \quad X_n \xrightarrow{p} X \quad (n \rightarrow \infty)$$

(証明は板書で)

定理 5.9 (大数の強法則)

$\{X_n\}$: 独立に 同一分布 に従う確率変数列,

$$E(X_n) = \mu \quad (\text{有限値})$$

\Rightarrow

$$\bar{X}_n \xrightarrow{a.s.} \mu \quad (n \rightarrow \infty)$$

(参考: 「確率論」 西尾真喜子, 第 6 章)

分布収束 (1/12)

定義 5.2 (分布収束 (convergence in distribution))

F_n : 確率変数 X_n の分布関数 ($n = 1, 2, \dots$),

F : 確率変数 X の分布関数

F の任意の連続点 x で

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = F(x)$$

が成り立つとき, X_n は X に分布収束 (または 法則収束) するといふ. P_X を X_n の極限分布といい,

$$X_n \xrightarrow{d} X \quad (n \rightarrow \infty) \quad \text{または} \quad X_n \xrightarrow{d} P_X \quad (n \rightarrow \infty)$$

とかく. (P_X には $N(0, 1)$ などの分布を表す記号こともある)

分布収束 (2/12)

退化した分布

実数 c に対して

$$P(X = c) = 1$$

であるとき, X の分布を c に退化した分布といい, $U(c)$ と表す.

$U(c)$ の分布関数は

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & x < c \\ 1 & x \geq c \end{cases}$$

分布収束 (3/12)

例 5.3

$\{X_n\}$: 互いに独立な確率変数列,

$X_i \sim U(0, 1)$ (区間 $(0, 1)$ 上の一様分布)

$$U_n = \max_{i \leq n} X_i$$

とする. U_n の分布関数は

$$\begin{aligned} F_n(u) &= P(U_n \leq u) = P(X_1 \leq u, \dots, X_n \leq u) \\ &= \prod_{i=1}^n P(X_i \leq u) = \begin{cases} 0, & u \leq 0 \\ u^n, & 0 < u < 1 \\ 1, & u \geq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(u) = F(u) = \begin{cases} 0, & u < 1 \\ 1, & u \geq 1 \end{cases}$$

分布収束 (4/12)

例 5.3 (つづき)

$F(u)$ は 1 に退化した分布 $U(1)$ の分布関数で

$$U_n \xrightarrow{d} U(1)$$

となる.

$$W_n = n(1 - U_n)$$

W_n の分布関数は

$$\begin{aligned} G_n(w) &= P(W_n \leq w) = P(n(1 - U_n) \leq w) = P(U_n \geq 1 - w/n) \\ &= 1 - F_n(1 - w/n) = \begin{cases} 0, & w \leq 0 \\ 1 - (1 - w/n)^n, & 0 \leq w \leq n \\ 1, & w \geq n \end{cases} \end{aligned}$$

分布収束 (5/12)

例 5.3 (つづき)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G_n(w) = G(w) = \begin{cases} 0, & w \leq 0 \\ 1 - e^{-w}, & w \geq 0 \end{cases}$$

$G(w)$ は平均 1 をもつ指数分布 $Ex(1)$ の分布関数であるので

$$W_n \xrightarrow{d} Ex(1)$$

となる.

分布収束 (6/12)

定理 5.1

確率変数列 X_1, X_2, \dots が X に確率収束すれば, その確率変数列は X に分布収束している. すなわち

$$X_n \xrightarrow{p} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{d} X$$

が成り立つ. とくに, $X \sim U(c)$ のときは, 逆も成り立つ. したがって

$$X_n \xrightarrow{d} c \Leftrightarrow X_n \xrightarrow{p} c.$$

が成り立つ.

分布収束 (7/12)

[証明]

F : X の分布関数, F_n : X_n の分布関数
 x : F の連続点, $\varepsilon > 0$

$$X_n > x \text{ かつ } |X_n - X| \leq \varepsilon \Rightarrow X > x - \varepsilon$$

$$X \leq x - \varepsilon \Rightarrow X_n \leq x \text{ または } |X_n - X| > \varepsilon$$

$$P(X \leq x - \varepsilon) \leq P(X_n \leq x) + P(|X_n - X| > \varepsilon)$$

$$F(x - \varepsilon) \leq F_n(x) + P(|X_n - X| > \varepsilon)$$

$$F(x - \varepsilon) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} F_n(x)$$

分布収束 (8/12)

$$P(X \leq x - \varepsilon) \leq P(X_n \leq x) + P(|X_n - X| > \varepsilon)$$

X_n と X を入れ替えると

$$P(X_n \leq x - \varepsilon) \leq P(X \leq x) + P(|X_n - X| > \varepsilon)$$

$$F_n(x - \varepsilon) \leq F(x) + P(|X_n - X| > \varepsilon)$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} F_n(x - \varepsilon) \leq F(x)$$

x を $x + \varepsilon$ を置き換えると

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} F_n(x) \leq F(x + \varepsilon)$$

分布収束 (9/12)

$$F(x - \varepsilon) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} F_n(x) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} F_n(x) \leq F(x + \varepsilon)$$

$\varepsilon \rightarrow 0$ とすると

$$F(x) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} F_n(x) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} F_n(x) \leq F(x)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = F(x)$$

分布収束 (10/12)

$P(X = c) = 1$ とし, 逆を示す. このとき

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < c \\ 1, & x \geq c \end{cases}$$

であり, $x \neq c \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = F(x)$.

$$\begin{aligned} P(|X_n - c| \leq \varepsilon) &\geq P(c - \varepsilon < X_n \leq c + \varepsilon) \\ &= F_n(c + \varepsilon) - F_n(c - \varepsilon) \end{aligned}$$

$\varepsilon > 0$ ならば

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - c| \leq \varepsilon) \geq F(c + \varepsilon) - F(c - \varepsilon) = 1 - 0 = 1.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - c| > \varepsilon) = 0.$$

分布収束 (11/12)

例 5.4 (定理 5.3 の逆の反例)

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4\}, \quad P(\{\omega\}) = \frac{1}{4}, \quad \omega = 1, 2, 3, 4$$

とし, $n = 1, 2, \dots$, に対して

$$X_n(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega = 1, 2 \\ 0, & \omega = 3, 4 \end{cases} \quad X(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega = 1, 2 \\ 1, & \omega = 3, 4 \end{cases}$$

とすると $X_n \xrightarrow{d} X$ ($n \rightarrow \infty$) であるが

$$\forall \omega \in \Omega \quad |X_n(\omega) - X(\omega)| = 1$$

なので, 確率収束しない.

分布収束 (12/12)

定理 5.4 (レヴィの連続定理)

X_n ($n = 1, 2, \dots$) の特性関数を φ_n ($n = 1, 2, \dots$) とする. $\varphi_n(t)$ が各点で $\varphi(t)$ に収束し, $\varphi(t)$ が $t = 0$ で連続ならば $\varphi(t)$ は, ある確率分布 P_X の特性関数であって $X_n \xrightarrow{d} P_X$ ($n \rightarrow \infty$).

[証明は省略 (テキスト参照)]

分布収束と特性関数の収束

$\varphi_n(t)$: 確率変数 X_n の特性関数 ($n = 1, 2, \dots$)

$\varphi(t)$: 確率変数 X の特性関数

$$X_n \xrightarrow{d} X \quad (n \rightarrow \infty) \quad \Leftrightarrow \quad \forall t \quad \varphi_n(t) \rightarrow \varphi(t) \quad (n \rightarrow \infty)$$

中心極限定理 (1/5)

定理 5.1 (中心極限定理)

$\{X_n\}$: 独立に同一分布に従う確率変数列,

$$E(X_j) = \mu, \text{Var}(X_j) = \sigma^2, \quad j = 1, \dots, n$$

$$Z_n = \frac{1}{\sqrt{n}\sigma} \sum_{j=1}^n (X_j - \mu) = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{\sigma} \xrightarrow{d} N(0, 1) \quad (n \rightarrow \infty)$$

[証明は板書で]

中心極限定理 (2/5)

注 5.6 (基準化)

確率変数 X に対して

$$Z = \frac{X - E(X)}{\sqrt{\text{Var}(X)}}$$

を X の**基準化** という.

- (1) $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j$ の基準化も, $S_n = \sum_{j=1}^n X_j$ の基準化も, $\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)/\sigma$ となる.
- (2) a, b を定数とするとき, X の基準化と, $aX + b$ の基準化は同じ.