確率・統計 B
標本分布・推定

若木宏文

wakaki@math.sci.hiroshima-u.ac.jp

2013.11.27

table of contents

復習

正規母集団からの統計量の分布 (1/9)

定理 6.8

$X_1, \ldots, X_n \overset{i.i.d.}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$ とする. このとき, 次が成り立つ.

(1) $\bar{X}_n \sim N(\mu, \sigma^2/n)$.

(2) $(n-1)S_n^2/\sigma^2 \sim \chi^2_{n-1}$.

(3) $\bar{X}_n$ と S_n は互いに独立である.

(証明には, 定義といくつかの定理が必要)

正規母集団からの統計量の分布 (4/9)

命題 1

$\boldsymbol{Z} = (Z_1, \ldots, Z_n)'$, $Z_1, \ldots, Z_n \overset{i.i.d.}{\sim} N(0,1)$ とする.

(1) $\boldsymbol{Z} \sim N_n(\boldsymbol{0}, I_n)$
ただし, I_n は n 次単位行列.

(2) A : n 次正則行列, $\boldsymbol{b}$: n 次元ベクトル
$A\boldsymbol{Z} + \boldsymbol{b} \sim N_n(\boldsymbol{b}, AA')$

(3) $\boldsymbol{X} \sim N_n(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$
$\Rightarrow \quad \mathrm{E}(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{\mu}, \mathrm{Var}(\boldsymbol{X}) = \Sigma,$
$\varphi_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{t}) := \mathrm{E}(e^{i\boldsymbol{t}'\boldsymbol{X}}) = \exp(i\boldsymbol{t}'\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{t}'\Sigma\boldsymbol{t}/2)$

(4) B : $m \times n$ 行列, $\mathrm{rank} B = m$, $\boldsymbol{b}$: m 次元ベクトル,
$\boldsymbol{X} \sim N_n(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$, $\quad \boldsymbol{Y} = B\boldsymbol{X} + \boldsymbol{b}$
$\Rightarrow \quad \boldsymbol{Y} \sim N_m(B\boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{b}, B\Sigma B')$

((3), (4) はテキストの定理 6.5, 証明は板書で)

正規母集団からの統計量の分布 (5/9)

定理 6.7

$X_1, \ldots, X_n \overset{i.i.d.}{\sim} N(0,1)$ とし, $V = X_1^2 + \cdots + X_n^2$ とする. このとき, $V \sim \chi_n^2$ である.

(証明は板書)

定理 6.8 の証明のポイント

$\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)' \Rightarrow \boldsymbol{X} \sim N_n(\mu \mathbf{1}_n, \sigma^2 I_n) \quad (\mathbf{1}_n = (1, \ldots, 1)')$
H : 第 1 行が $(1/\sqrt{n}, \ldots, 1/\sqrt{n})$ である n 次の直交行列

$$\boldsymbol{Y} = (Y_1, \ldots, Y_n)' = H\boldsymbol{X}$$

と定めると

$$\boldsymbol{Y} \sim N_n(\mu H \mathbf{1}_n, \sigma^2 I_n)$$

$$\mathrm{E}(\boldsymbol{Y}) = \mu \begin{pmatrix} 1/\sqrt{n} & \cdots & 1/\sqrt{n} \\ * & \cdots & * \\ \vdots & & \vdots \\ * & \cdots & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{n}\mu \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$Y_1, \ldots, Y_n$ は独立, $Y_1 \sim N(\sqrt{n}\mu, \sigma^2)$, $Y_2, \ldots, Y_n \overset{i.i.d.}{\sim} N(0, \sigma^2)$

6.3. 順序統計量

順序統計量 (1/5)

定義 6.12

$X_1, \ldots, X_n$ を大きさ n のランダム標本とする．これを大きさの順に並べて $X_{(1)} \leq \cdots \leq X_{(n)}$ とするとき

$$X_{(1)}, \ldots, X_{(n)}$$

をこの標本の順序統計量といい，$X_{(i)}$ を第 i 順序統計量とよぶ．

例．$n = 4$，X_1, X_2, X_3, X_4 の実現値が
$X_1 = 3, X_2 = 4, X_3 = 1, X_4 = 5$
$\Rightarrow \quad X_{(1)} = 1, X_{(2)} = 3, X_{(3)} = 4, X_4 = 5$

順序統計量 (2/5)

ランダム標本の特性量

(1) 標本メディアン (中央値)

$$\tilde{X} = \begin{cases} X_{(k)} & n = 2k-1 \\ (X_{(k)} + X_{(k+1)})/2 & n = 2k \end{cases}$$

(2) 標本範囲

$$R = X_{(n)} - X_{(1)}$$

(3) 標本中点

$$(X_{(1)} + X_{(n)})/2$$

(4) 100α%調整平均

$$\frac{1}{n-2k} \sum_{i=k+1}^{n-k} X_{(i)}, \quad k = [n\alpha]$$

($[a]$ は a を超えない最大の整数, ガウス記号と呼ばれる)

順序統計量 (3/5)

命題 2 (最大値・最小値の分布)

$F(x)$：母集団分布の分布関数
$f(x)$：母集団分布の確率密度関数 (連続型の場合)

(1) $X_{(n)} = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$ の分布関数と確率密度関数

$$G_n(y) = \mathsf{P}(X_{(n)} \leq y) = \{F(y)\}^n,$$
$$g_n(y) = \frac{d}{dy} G_n(y) = nf(y)\{F(y)\}^{n-1}$$

(2) $X_{(1)} = \min\{X_1, \ldots, X_n\}$ の分布関数と確率密度関数

$$G_1(y) = \mathsf{P}(X_{(1)} \leq y) = 1 - \{1 - F(y)\}^n,$$
$$g_1(y) = \frac{d}{dy} G_n(y) = nf(y)\{1 - F(y)\}^{n-1}$$

(証明は板書で)

順序統計量 (4/5)

定理 6.11 (順序統計量の分布)

$F(x)$: 母集団分布の分布関数

$f(x)$: 母集団分布の確率密度関数 (連続型の場合)

(1) $\mathrm{P}(X_{(i)} \leq y) = \sum_{k=i}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!}\{F(y)\}^k\{1-F(y)\}^{n-k}.$

(2) $g_i(y)$: $X_{(i)}$ の確率密度関数

$$g_i(y) = \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!}\{F(y)\}^{i-1}\{1-F(y)\}^{n-i}f(y).$$

順序統計量 (5/5)

定理 6.11 (順序統計量の分布 (つづき))

(3) $i < j$, $y_i \leq y_j$ のとき

$$\mathsf{P}(X_{(i)} \leq y_i, X_{(j)} \leq y_j) = \sum_{k=j}^{n} \sum_{l=i}^{k} \frac{n! \{F(y_i)\}^l \{F(y_j) - F(y_i)\}^{k-l} \{1 - F(y_j)\}^{n-k}}{l!(k-l)!(n-k)!}.$$

(4) $g_{ij}(y_i, y_j)$: $(X_{(i)}, X_{(j)})$ の同時確率密度関数
$y_i < y_j$ のとき

$$g_{ij}(y_i, y_j) = \frac{n! F(y_i)^{i-1} \{F(y_j) - F(y_i)\}^{j-i-1} \{1 - F(y_j)\}^{n-j} f(y_i) f(y_j)}{(i-1)!(j-i-1)!(n-j)!}$$

7. 推定

点推定 (1/7)

$\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$：標本変量 (確率変数)
$\mathcal{P} = \{\mathsf{P}_\theta \,|\, \theta \in \Theta\}$：統計モデル

$$\boldsymbol{X} \sim \mathsf{P} \in \mathcal{P}$$

$f(\boldsymbol{x}; \theta)$：$\mathsf{P}_\theta$ の確率密度関数 (確率関数)

$\mathcal{X} = \{\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n \,|\, f(\boldsymbol{x}; \theta)) > 0\}$

パラメータ $\gamma = \gamma(\theta)$ の**点推定**：
各 $\boldsymbol{x} \in \mathcal{X}$ に γ の推定値 $\hat{\gamma} = \hat{\gamma}(\boldsymbol{x})$ を対応させる方法

$\hat{\gamma}(\boldsymbol{x})$：推定値，　$\hat{\gamma}(\boldsymbol{X})$：推定量

点推定 (2/7)

例 7.1

$X_1, \ldots, X_{10} \overset{i.i.d.}{\sim} B(1, \theta),\ \theta \in (0,1)$

(1) $\hat{\theta}_1 = (X_1 + \cdots + X_{10})/10$

(2) $\hat{\theta}_2 = 1/2$

(3) $\hat{\theta}_3 = X_1$

例 7.2

繰り返し測定モデル $X_i = \mu + \varepsilon_i,\ (i = 1, \ldots, n)$

$\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \overset{i.i.d.}{\sim} \varepsilon$, $\mathrm{E}(\varepsilon) = 0,\ \mathrm{Var}(\varepsilon) = \sigma^2$

$\theta = (\mu, \sigma^2)$

(1) $\gamma(\theta) = \mu:\quad \hat{\mu} = \bar{X}_n = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$

(2) $\gamma(\theta) = \sigma^2:\quad \hat{\sigma}^2 = S_n = \dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2$

点推定 (3/7)

良さの基準

(1) 偏り: $\mathrm{Bias}(\gamma) = \mathsf{E}(\hat{\gamma}) - \gamma.$

(2) 分散: $\mathsf{Var}(\hat{\gamma}) = \mathsf{E}[\{\hat{\gamma} - \mathsf{E}(\hat{\gamma})\}^2].$

(3) 平均 2 乗誤差: $\mathrm{MSE}(\hat{\gamma}) = \mathsf{E}\{(\hat{\gamma} - \gamma)^2\}.$

(4) 集中確率: $\mathsf{P}(|\hat{\gamma} - \gamma| \leq a), \quad a > 0.$

(5) 一致性: $n \to \infty$ のとき, $\quad \hat{\gamma} \xrightarrow{p} \gamma.$

平均 2 乗誤差, 分散, 偏りの 2 乗の間の関係：

$$\mathrm{MSE}(\hat{\gamma}) = \mathsf{E}[\{\hat{\gamma} - \mathsf{E}(\hat{\gamma}) + \mathsf{E}(\hat{\gamma}) - \gamma\}^2] = \mathsf{Var}(\hat{\gamma}) + \mathrm{Bias}(\hat{\gamma})^2.$$

点推定 (4/7)

定義 7.1

$\hat{\gamma} = \hat{\gamma}(\boldsymbol{X})$: パラメータ $\gamma = \gamma(\theta)$ の推定量

(1) $^\forall\theta \in \Theta$ に対して, $\mathrm{E}(\hat{\gamma}) = \gamma$ となるとき, $\hat{\gamma}$ は不偏推定量であるという.

(2) γ の不偏推定量が存在するとき, γ は推定可能であるという.

(3) γ の不偏推定量 $\hat{\gamma}$ が, 任意の不偏推定量 $\tilde{\gamma}$ に対して

$$^\forall\theta \in \Theta \text{ に対して, } \mathrm{Var}_\theta(\hat{\gamma}) \leq \mathrm{Var}_\theta(\tilde{\gamma})$$

を満たすとき, $\hat{\gamma}$ は γ の一様最小分散不偏推定量 (UMVUE: Uniformly Minimum Variance Unbiased Estimator) であるという.

点推定 (5/7)

例 7.3 (例 7.1 の続き)

(1) $\mathsf{E}(\hat{\theta}_1) = \theta$, $\mathsf{Var}(\hat{\theta}_1) = \theta(1-\theta)/10$.

(2) $\mathsf{E}(\hat{\theta}_2) = 1/2$, $\mathsf{Var}(\hat{\theta}_2) = 0$.

(3) $\mathsf{E}(\hat{\theta}_3) = \theta$, $\mathsf{Var}(\hat{\theta}_3) = \theta(1-\theta)$.

点推定 (6/7)

例 7.4

$X_1, \ldots, X_n \overset{i.i.d.}{\sim} X$, $\mathrm{E}(X) = \mu$, $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$

(1) μ の推定

$\hat{\mu}_{\boldsymbol{c}} = c_1 X_1 + \cdots + c_n X_n$

$$\mathrm{E}(\hat{\mu}_{\boldsymbol{c}}) = c_1\mu + \cdots + c_n\mu = (c_1 + \cdots + c_n)\mu$$

$\hat{\mu}_{\boldsymbol{c}}$ が不偏であるための必要十分条件は $c_1 + \cdots + c_n = 1$

$$\mathrm{Var}(\hat{\mu}_{\boldsymbol{c}}) = (c_1^2 + \cdots + c_n^2)\sigma^2.$$

条件 $c_1 + \cdots + c_n = 1$ のもとで $c_1^2 + \cdots + c_n^2$ が最小となるのは

$$c_1 = \cdots = c_n = \frac{1}{n}$$

点推定 (7/7)

例 7.4 (続き)

(2) σ^2 の推定
標本分散 $S_n^2 = (n-1)^{-1}\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ は σ^2 の不偏推定量

$$\mathrm{E}\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2\right\} = \frac{n-1}{n}\sigma^2$$

$n^{-1}\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ は σ^2 の不偏推定量ではない.