確率・統計 B　中間試験問題

2014.11.19

問題 1 $X_1, X_2, \ldots$ は独立な確率変数とする. k が偶数のとき $\mathrm{P}(X_k = 0) = \mathrm{P}(X_k = 1) = \frac{1}{2}$ とし, k が奇数のときは $\mathrm{P}(X_k = 0) = \mathrm{P}(X_k = -1) = \frac{1}{2}$ とする. $Y_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$ とするとき, 以下に答えよ.

(1) $\dfrac{X_n}{n} \xrightarrow{p} 0 \ (n \to \infty)$ を示せ.

(2) n が偶数のとき, Y_n の平均と分散を求めよ.

(3) m を自然数とする. $Y_{2m} \xrightarrow{p} 0 \ (m \to \infty)$ を示せ.

(4) m を自然数とする. $Y_{2m+1} \xrightarrow{p} 0 \ (m \to \infty)$ を示せ.

問題 2 $\{X_n\}$ を互いに独立に, 次の確率密度関数で定まる連続型分布に従う確率変数列とする.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{(1+x)^3}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

$V_n = \min_{i \leq n} X_i$ とするとき, 以下に答えよ.

(1) X_n の分布関数を求めよ.

(2) V_n の分布関数を求めよ.

(3) $V_n \xrightarrow{p} 0 \ (n \to \infty)$ を示せ.

(4) $W_n = nV_n$ とすると, $n \to \infty$ のとき, W_n はある分布に分布収束する. 極限分布の分布関数と確率密度関数を求めよ.

問題 3 ある町では, 丁度 36 パーセントの人が麻疹に対する耐性を持っているとする. この町から無作為に一人選ぶとき, 麻疹に耐性があれば $X = 1$, なければ $X = 0$ とする. この町から無作為に 100 人選ぶときの, 麻疹に耐性のある人数を S とする. 町の人口は十分大きく, 100 人を復元抽出で選ばれたとみなして良いとして, 以下に答えよ.

(1) X の平均と分散, および, S の平均と分散を求めよ.

(2) 中心極限定理を用いると, 100 人中耐性のある人が 40 人以下である確率は標準正規分布関数 $\Phi(x)$ を用いて $\Phi(ア)$ で近似できる. アに入る値を書け.
(連続性の補正は考えなくて良い.)