

問 1 $X_1, \dots, X_n \stackrel{i.i.d.}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$, $\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j$ とする.

- (1) $\hat{\mu}$ の偏りを求めよ.
- (2) $\hat{\mu}$ の分散を求めよ.
- (3) $\hat{\mu}$ の平均 2 乗誤差を求めよ.
- (4) $\hat{\mu}$ の集中確率 $P(|\hat{\mu} - \mu| \leq a)$ を a, n, σ と標準正規分布関数 Φ を用いて表わせ.
- (5) $\hat{\mu}$ は一致推定量であることを示せ.

問 2 X_1, X_2 を独立に $E(1/\mu)$ に従う確率変数とする.

- (1) $E(X_1), E(X_1^2), \text{Var}(X_1)$ を求めよ.
- (2) (X_1, X_2) の同時確率密度関数 $f(x_1, x_2; \mu)$, および μ の Fisher 情報量を求めよ.
- (3) $T = X_1 + X_2$ は μ の十分統計量である. 理由を述べよ.
- (4) (X_1, T) の同時確率密度関数を求めよ.
- (5) $T = t$ を与えたときの X_1 の条件付き確率密度関数を求めよ.
- (6) $g(T) = E[X_1 | T]$ を求めよ.
- (7) $g(T)$ は μ の一様最小分散不偏推定量であることを示せ.

問 3 $X_1, \dots, X_n \stackrel{i.i.d.}{\sim} G(p)$ とする.

- (1) $E(X_1)$ を求めよ.
- (2) p の最尤推定量 \hat{p}_n を求めよ.
- (3) \hat{p}_n は p の一致推定量であることを示せ.

問 4 (1) 手作りのサイコロを 100 回投げたところ, 偶数の目が 64 回でた. このサイコロを投げるとき偶数が出る確率を p とする. p の信頼係数 95% 近似信頼区間を求めよ.

(2) 中学校 2 年生男子 100 人を無作為に選んで, 身長を測定したところ, その平均は 155.0cm, 標準偏差 10.0 cm であった. 身長の母平均の 95% 信頼区間を求めよ.

z_α を標準正規分布の上側 α 点とするとき, $z_{0.025} = 1.96$ とせよ.

$$\text{指数分布 : } E(\lambda) \quad f(x; \lambda) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$$

$$\text{幾何分布 : } G(p) \quad f(x; p) = p(1-p)^x \quad (x = 0, 1, 2, \dots)$$