確率・統計 B 練習問題

2014.11.12

問題 1 次の確率密度関数によって定まる連続型確率分布の分布関数, 平均, 分散を求めよ.

(1) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & (0 \leq x \leq 2) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$

(2) $f(x) = \begin{cases} x & (0 \leq x \leq 1) \\ 2-x & (1 < x \leq 2) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$

(3) $f(x) = \begin{cases} x\,e^{-x} & (x \geq 0) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$

問題 2 次の確率密度関数 (確率関数) によって定まる離散型確率分布の平均, 分散を求めよ.

(1) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{n!}{x!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x} & (x = 0, 1, \ldots, n) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$

ただし, n は自然数, $0 < p < 1$ である.

(2) $f(x) = \begin{cases} e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} & (x = 0, 1, 2, \ldots) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$

ただし, $\lambda > 0$ である.

(3) $f(x) = \begin{cases} (1-p)p^x & (x = 0, 1, 2, \ldots) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$

ただし, $0 < p < 1$ である.

問題 3 $\{X_n\}$ を確率変数列とする. $\mathrm{E}[X_n^2] < \infty$ であり, X_n の特性関数は

$$\psi_n(t) = \begin{cases} \dfrac{n}{it}\{e^{it/n} - 1\} & (t \neq 0) \\ 1 & (t = 0) \end{cases} \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

であるとする. $n \to \infty$ のとき, X_n は 0 に確率収束することを示せ.

(ヒント: 仮定から $\psi_n(t)$ は連続な 2 次導関数を持つので, $t \neq 0$ のときの 2 次導関数を計算して, $t \to 0$ とすれば, $t = 0$ での 2 次微分係数が得られる.)

問題 4 $\{X_n\}$ を確率変数列とする. X_n の特性関数は $\psi_n(t) = \exp(itc - |t|/n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ であるとする. ただし, c は定数である.

(1) 点 c に退化した分布 $\mathrm{U}(c)$ の特性関数を求めよ.

(2) $n \to \infty$ のとき, X_n は $\mathrm{U}(c)$ に分布収束することを示せ.

問題 5 $X_1, X_2, \ldots$ は独立な確率変数で, 平均 $\mathrm{E}(X_k) = 1$ $(k = 1, 2, \cdots)$ とする. 正の定数 M が存在して, 分散 $\mathrm{Var}(X_k) \le M (k = 1, 2, \cdots)$ であるとする. $Y_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$ とおくとき, 次に答えよ.

(1) Y_n の平均を求めよ.

(2) Y_n の分散は, $n \to \infty$ のとき 0 に収束することを示せ.

(3) Y_n は $n \to \infty$ のとき, 1 に確率収束することを示せ.

問題 6 $\{X_n\}$ は互いに独立に, 問題 1 (1) で定まる連続型分布に従う確率変数列とする.

(1) $V_n = \max_{i \le n} X_i$ とすると, $n \to \infty$ のとき, V_n は 2 に分布収束することを示せ.

(2) $U_n = \min_{i \le n} X_i$ とすると, $n \to \infty$ のとき, U_n は 0 に分布収束することを示せ.

問題 7 $\{X_n\}$ は互いに独立に, 問題 1 (2) で定まる連続型分布に従う確率変数列とする.

(1) $V_n = \max_{i \le n} X_i$ とすると, $n \to \infty$ のとき, V_n は 2 に分布収束することを示せ.

(2) $U_n = \min_{i \le n} X_i$ とすると, $n \to \infty$ のとき, U_n は 0 に分布収束することを示せ.

問題 8 $\{X_n\}$ は互いに独立に, 問題 1 (3) で定まる連続型分布に従う確率変数列とする.

(1) $U_n = \min_{i \le n} X_i$ とすると, $n \to \infty$ のとき, U_n は 0 に分布収束することを示せ.

(2) $W_n = \sqrt{n} U_n$ は $n \to \infty$ のとき, ある連続型分布に分布収束する. 極限分布の確率密度関数を求めよ.

問題 9 X_n を自由度 n のカイ 2 乗分布に従う確率変数とすると, $\mathrm{E}[X_n^2] < \infty$ であり, X_n の特性関数は $\psi_n(t) = (1 - 2it)^{-n/2}$ である.

(1) X_n の平均と分散を求めよ.

(2) Z_n を X_n を規準化 (標準化) した確率変数とする. Z_n の特性関数を求めよ.

(3) $n \to \infty$ のとき, Z_n は $N(0, 1)$ に分布収束することを示せ. ただし, $N(0, 1)$ の特性関数は $e^{-t^2/2}$ であることを用いてよい.

問題 10 ある町では, 住民の丁度 3 分の 1 の血液型が A 型であるとする. この町から無作為に選んだ人の血液型が A 型であれば $X = 1$, A 型でなければ $X = 0$ とする.

(1) X の母集団分布の分布関数を求めよ.

(2) $X_1, \ldots, X_n$ を, この母集団分布からのランダム標本とする. $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ とするとき, S_n の平均と分散を求めよ.

(3) 町の人口は十分に大きいとする. この町から 100 人を無作為に選んだとき, A 型の人が 30 人以下である確率は, 標準正規分布関数 Φ を用いて Φ(ア) によって近似できる. ア に入る数を答えよ.