確率・統計 B レポート問題

2014.11.26

以下の問題の解答をレポート用紙にまとめ, 学生番号, 氏名, 提出日時を記した表紙をつけて閉じ, 12 月 5 日 (金) までに数学事務室カウンター前の所定の場所に提出すること.

問題 1 X を確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ 上の (実数値) 確率変数とする. $\{a_n\}_{n=1,2,\ldots}$ を $n \to \infty$ のとき 0 に収束する実数列とし, $Y_n = a_n X$ $(n = 1, 2, \ldots)$ と定義すると, $n \to \infty$ のとき, Y_n は 0 に概収束することを示せ.

問題 2 次の確率密度関数によって定まる連続型確率分布の分布関数, 平均, 分散を求めよ.

(1) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} & (0 \leq x \leq 2) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$

(2) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2} & (0 \leq x \leq 2) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$

問題 3 次の確率密度関数 (確率関数) によって定まる離散型確率分布の平均, 分散を求めよ.

(1) $f(x) = \begin{cases} e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} & (x = 0, 1, 2, \ldots) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$

ただし, $\lambda > 0$ である.

(2) $f(x) = \begin{cases} (1-p)p^x & (x = 0, 1, 2, \ldots) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$

ただし, $0 < p < 1$ である.

問題 4 $\{X_n\}$ を確率変数列とする. $\mathrm{E}[X_n^2] < \infty$ であり, X_n の特性関数は

$$\psi_n(t) = \frac{n-1}{n - e^{it}} \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

であるとする. $n \to \infty$ のとき, X_n は 0 に確率収束することを示せ.

問題 5 $\{X_n\}$ を確率変数列とする．X_n の特性関数は $\psi_n(t) = \exp(itc - |t|/n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ であるとする．ただし, c は定数である．

(1) 点 c に退化した分布 $\mathrm{U}(c)$ の特性関数を求めよ．

(2) $n \to \infty$ のとき, X_n は $\mathrm{U}(c)$ に分布収束することを示せ．

問題 6 $X_1, X_2, \ldots$ は独立な確率変数で, 平均 $\mathrm{E}(X_k) = 1$, 分散 $\mathrm{Var}(X_k) = 1 (k = 1, 2, \cdots)$ であるとする．$Y_n = \left\{ \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k \right\}^2$ とおくとき, 次に答えよ．

(1) Y_n の平均を求めよ．

(2) Y_n は $n \to \infty$ のとき, 1 に確率収束することを示せ．

問題 7 $\{X_n\}$ は互いに独立に, 問題 1 (1) で定まる連続型分布に従う確率変数列とする．

(1) $V_n = \max_{i \le n} X_i$ とすると, $n \to \infty$ のとき, V_n は 2 に分布収束することを示せ．

(2) $U_n = \min_{i \le n} X_i$ とすると, $n \to \infty$ のとき, U_n は 0 に分布収束することを示せ．

問題 8 $\{X_n\}$ は互いに独立に, 問題 1 (2) で定まる連続型分布に従う確率変数列とする．

(1) $V_n = \max_{i \le n} X_i$ とすると, $n \to \infty$ のとき, V_n は 2 に分布収束することを示せ．

(2) $U_n = \min_{i \le n} X_i$ とすると, $n \to \infty$ のとき, U_n は 0 に分布収束することを示せ．

問題 9 ある町では, 住民の丁度 3 分の 1 の血液型が A 型であるとする．この町から無作為に選んだ人の血液型が A 型であれば $X = 1$, A 型でなければ $X = 0$ とする．

(1) X の母集団分布の分布関数を求めよ．

(2) $X_1, \ldots, X_n$ を, この母集団分布からのランダム標本とする．$S_n = X_1 + \cdots + X_n$ とするとき, S_n の平均と分散を求めよ．

(3) 町の人口は十分に大きいとする．この町から 100 人を無作為に選んだとき, A 型の人が 30 人以下である確率は, 標準正規分布関数 Φ を用いて Φ(ア) によって近似できる．ア に入る数を答えよ．