



# 確率・統計 B

若木宏文

wakaki@math.sci.hiroshima-u.ac.jp

<http://home.hiroshima-u.ac.jp/wakaki/lecture/index.shtml>

2014.10.1

# シラバス

- 教科書：「確率・統計の数学的基礎」（藤越，若木，柳原著）
- 第1回 確率・統計Aの復習  
確率空間，確率変数の分布，期待値，特性関数
- 第2-5回 確率変数の収束  
確率収束，大数の法則，分布収束，中心極限定理，概収束，漸近公式
- 第6-7回 母集団分布と統計モデル  
標本，無作為抽出，母集団分布，統計モデル，
- 第8回 中間試験（予定）
- 第9-11回 統計量の分布，順序統計量
- 第12-15回 推定  
推定量の評価基準，不偏推定，ラオーブラックウェルの定理，最尤法，区間推定

# table of contents

## 確率・統計Aの復習

確率空間の定義と性質

確率変数の分布

期待値

## 特性関数

特性関数

特性関数と分布

## 確率空間の定義と性質 (1/5)

### 定義 1 (確率空間)

$(\Omega, \mathcal{B}, P)$

- $\Omega$  : 標本空間.  
試行によって起こり得る結果全体からなる集合
- $\mathcal{B}$  :  $\sigma$ -集合体. 確率の定義域
- $P$  :  $\mathcal{B}$  上で定義された確率測度

### 定義 2 ( $\sigma$ -集合体)

$\mathcal{B}$  が  $\Omega$  上の  $\sigma$ -集合体であるとは,  $\mathcal{B} \subset \wp(\Omega)$  であって

(B1)  $\Omega \in \mathcal{B}$

(B2)  $A \in \mathcal{B} \Rightarrow A^c \in \mathcal{B}$

(B3)  $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{B} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{B}$

## 確率空間の定義と性質 (2/5)

### $\sigma$ -集合体の性質

$\mathcal{B}$  を  $\Omega$  上の  $\sigma$ -集合体とすると

$$(1) \emptyset \in \mathcal{B}.$$

$$(2) A_1, \dots, A_n \in \mathcal{B} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^n A_i, \bigcap_{i=1}^n A_i \in \mathcal{B}.$$

$$(3) A_1, A_2, \dots \in \mathcal{B} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{B}.$$

$$(4) A_1, A_2, \dots \in \mathcal{B} \Rightarrow \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n, \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n \in \mathcal{B}.$$

## 確率空間の定義と性質 (3/5)

### 定義 3 (確率測度)

$P$  が  $(\Omega, \mathcal{B})$  上の確率測度であるとは、 $P$  が  $\mathcal{B}$  上の実数値関数であって

(P1) 任意の  $A \in \mathcal{B}$  に対して  $0 \leq P(A) \leq 1$ .

(P2)  $P(\Omega) = 1$ .

(P3)  $P$  は完全加法的である. すなわち、 $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{B}$  で、 $A_i \cap A_j = \emptyset$  ( $i \neq j$ ) ならば

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$



## 確率空間の定義と性質 (4/5)

### 確率測度の性質 1

- (1)  $P(\emptyset) = 0$ .
- (2)  $P(A^c) = 1 - P(A)$ .
- (3)  $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$ .
- (4)  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ .
- (5)  $A_i \cap A_j = \emptyset \ (i \neq j) \Rightarrow P(\bigcup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$ .
- (6)  $P(\bigcup_{i=1}^n A_i) \leq \sum_{i=1}^n P(A_i)$ .

## 確率空間の定義と性質 (5/5)

### 確率測度の性質 2

$$(1) \quad P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n).$$

$$(2) \quad A_n \subset A_{n+1} \quad (n = 1, 2, \dots) \Rightarrow P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n).$$

$$(3) \quad A_n \supset A_{n+1} \quad (n = 1, 2, \dots) \Rightarrow P(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n).$$

$$(4) \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n \\ \Rightarrow P(\lim_{n \rightarrow \infty} A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n).$$

ただし

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k, \quad \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k,$$



## 確率変数の分布 (1/8)

1次元ボレル集合体  $\mathbb{B}_1$ :

$\mathbb{R}$  上の, すべての開集合を含む最小の  $\sigma$ -集合体

### 定義 4 (確率変数)

$X$  が 確率空間  $(\Omega, \mathcal{B}, P)$  上の確率変数であるとは,  $X$  は  $\Omega$  上の実数値関数であって

$$\forall B \in \mathbb{B}_1 \quad X^{-1}(B) \in \mathcal{B}$$

### 定義 5 (確率変数の分布)

$(\Omega, \mathcal{B}, P)$  上の確率変数  $X$  に対して, 次で定義される  $(\mathbb{R}, \mathbb{B}_1)$  上の確率測度  $P_X$  を  $X$  によって導入される確率測度, あるいは  $X$  の分布 という.

$$P_X(A) = P(X^{-1}(A)) \quad (A \in \mathbb{B}_1)$$

## 確率変数の分布 (2/8)

$n$ 次元ボレル集合体  $\mathbb{B}_n$ :

$\mathbb{R}^n$  上の, すべての開集合を含む最小の  $\sigma$ -集合体

**定義 6 ( $n$ 次元確率変数 (確率ベクトル))**

$\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$  の各成分  $X_i$  が確率空間  $(\Omega, \mathcal{B}, P)$  上の確率変数であるとき  $\mathbf{X}$  は  $n$ 次元確率変数 (確率ベクトル) であるという.

**定義 7 ( $n$ 次元確率変数の分布)**

$(\Omega, \mathcal{B}, P)$  上の  $n$ 次元確率変数  $\mathbf{X}$  に対して, 次で定義される  $(\mathbb{R}^n, \mathbb{B}_n)$  上の確率測度  $P_{\mathbf{X}}$  を  $\mathbf{X}$  によって導入される 確率測度, あるいは  **$\mathbf{X}$  の分布** という.

$$P_{\mathbf{X}}(A) = P(\mathbf{X}^{-1}(A)) \quad (A \in \mathbb{B}_n)$$

## 確率変数の分布 (3/8)

**分布関数** :  $n$ 次元確率変数  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$  の分布関数とは

$$\begin{aligned} F_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_n) &= P(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n) \\ &= P_{\mathbf{X}}((-\infty, x_1] \times \dots \times (-\infty, x_n]) \end{aligned}$$

$F_{\mathbf{X}}$  と  $P_{\mathbf{X}}$  は 1対1 に対応する

## 確率変数の分布 (4/8)

### 定義 8 (連続型分布)

$$F_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} f_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n$$

$$P_{\mathbf{X}}(A) = \int_A f_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n$$

と表されるとき,  $\mathbf{X}$ , あるいは  $P_{\mathbf{X}}$  は連続型であるという. このとき,  $f_{\mathbf{X}}$  を確率密度関数 とよぶ.

連続型分布は, 確率密度関数によって一意に定められる.

## 確率変数の分布 (5/8)

### 例 1 (正規分布)

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x - \mu)^2\right)$$

によって定まる連続型分布を 平均  $\mu$ , 分散  $\sigma^2$  の正規分布とよび  $N(\mu, \sigma^2)$  と表す.

$$f_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \det(\Sigma)^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})' \Sigma^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})\right)$$

によって定まる  $n$  次元連続型分布を 平均ベクトル  $\boldsymbol{\mu}$ , 分散共分散行列  $\Sigma$  の  $n$  次元正規分布とよび  $N_n(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$  と表す. ただし

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}, \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \sigma_{n1} & \cdots & \sigma_{nn} \end{pmatrix}$$

## 確率変数の分布 (6/8)

### 定義 9 (離散型分布)

$\mathbb{R}^n$  内の点列  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots$  と, 実数列  $p_1, p_2, \dots$  が存在して

$$P_{\mathbf{X}}(A) = \sum_{i: \mathbf{x}_i \in A} p_i$$

と表されるとき,  $\mathbf{X}$ , あるいは  $P_{\mathbf{X}}$  は**離散型**であるという.

$$f_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_n) = P(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n)$$

**確率密度関数 (確率関数)** とよぶ. このとき,

$$f_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} p_i & (x_1, \dots, x_n) = \mathbf{x}_i \quad (i = 1, 2, \dots) \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

である.

**離散型分布は, 確率密度関数によって一意に定められる.**

## 確率変数の分布 (7/8)

### 例 2 (2 項分布)

$$f_X(x) = \begin{cases} {}^n C_x p^x (1-p)^{n-x} & x = 0, 1, \dots, n \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

によって定まる離散型分布を 繰り返し数  $n$ , 成功確率  $p$  の 2 項分布とよび  $B(n, p)$  と表す.

### 例 3 (3 項分布)

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \begin{cases} \frac{n!}{x!y!(n-x-y)!} p^x q^y (1-p-q)^{n-x-y} & \begin{cases} x = 0, 1, \dots \\ y = 0, 1, \dots \\ x + y \leq n \end{cases} \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

によって定まる離散型分布を 繰り返し数  $n$ , 成功確率  $(p, q)$  の 3 項分布とよび  $M_3(n, (p, q))$  と表す.

## 確率変数の分布 (8/8)

### 確率変数の独立性

$(X_1, \dots, X_n)$  の確率密度関数を  $f_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_n)$ ,  
 $X_1, \dots, X_n$  の周辺確率密度関数を, それぞれ  $f_1(x_1), \dots, f_n(x_n)$  とする.  
 $X_1, \dots, X_n$  が互いに独立であるための必要十分条件は

$$f_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n f_i(x_i)$$



## 期待値の定義と性質 (1/3)

### 定義 10 (期待値)

$\mathbf{X}$  :  $n$  次元確率変数

$g(\mathbf{x})$  :  $\mathbb{R}^n$  上の実数値 (ボレル可測) 関数

に対して

$$E(g(\mathbf{X})) = \begin{cases} \int_{\mathbb{R}^n} g(\mathbf{x}) f_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n & (\text{連続型の場合}) \\ \sum_{i=1}^{\infty} g(\mathbf{x}_i) f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_i) & (\text{離散型の場合}) \end{cases}$$

を  $g(\mathbf{X})$  の期待値とよぶ.

- $E(X)$  :  $X$  の平均
- $\text{Var}(X) = E\{(X - E(X))^2\}$  :  $X$  の分散
- $\text{Cov}(X, Y) = E\{(X - E(X))(Y - E(Y))\}$  :  $X$  と  $Y$  の共分散

## 期待値の定義と性質 (2/3)

### 平均の性質

- (1)  $E(aX) = aE(X)$ .
- (2)  $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$ .
- (3)  $X \leq Y \Rightarrow E(X) \leq E(Y)$ .
- (4)  $X$  と  $Y$  が独立  $\Rightarrow E\{g(X)h(Y)\} = E\{g(X)\}E\{h(Y)\}$

### 分散の性質

- (1)  $\text{Var}(X + a) = \text{Var}(X)$ .
- (2)  $\text{Var}(aX) = a^2\text{Var}(X)$ .
- (3)  $\text{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2$ .
- (4)  $\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + 2\text{Cov}(X, Y)$
- (5)  $X$  と  $Y$  が独立  $\Rightarrow \text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y)$

## 期待値の定義と性質 (3/3)

### 不等式

- (1) (マルコフの不等式)  $X$  を非負値確率変数とする. 任意の正数  $a$  に対して

$$P(X \geq a) \leq E(X)/a.$$

- (2) (チェビシェフの不等式) 確率変数  $X$  の平均, 分散を  $E(X) = \mu$ ,  $\text{Var}(X) = \sigma^2 < \infty$  とする. 任意の正数  $k$  に対して

$$P(|X - \mu| \geq k) \leq \sigma^2/k^2.$$

- (3) (シュワルツの不等式)

$$\{\text{Cov}(X, Y)\}^2 \leq \text{Var}(X)\text{Var}(Y)$$

## 特性関数 (1/4)

### 定義 4.1 (特性関数)

$X$  : 確率変数

$$\varphi_X(t) = \mathbf{E}[e^{itX}] = \begin{cases} \sum_x e^{itx} f_X(x) & \text{離散型} \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f_X(x) dx & \text{連続型} \end{cases}$$

## 特性関数 (2/4)

### 定理 4.1

- (1)  $\varphi_X(0) = 1$ .
- (2)  $|\varphi_X(t)| \leq 1$ .
- (3)  $\varphi_X(t)$  は一様連続である.
- (4)  $\varphi_{cX+d}(t) = e^{itd} \varphi_X(ct)$ . ただし,  $c, d$  は定数.
- (5)  $E(|X|^n) < \infty$  ならば,  $\varphi_X(t)$  は  $C^n$  クラス (連続な  $n$  次導関数が存在) で

$$\left. \frac{d^n}{dt^n} \varphi_X(t) \right|_{t=0} = i^n E(X^n).$$

## 特性関数 (3/4)

### 定義 4.2 (多次元分布の特性関数)

$\mathbf{X}$  を  $p$  次元の確率変数,  $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^p$  とし

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_p \end{pmatrix}, \quad \mathbf{t} = \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_p \end{pmatrix}$$

とする. このとき

$$\varphi_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) = \mathbb{E}\{\exp(i\mathbf{t}'\mathbf{X})\} = \mathbb{E}\left\{\prod_{j=1}^p \exp(it_j X_j)\right\}$$

を  $\mathbf{X}$  の特性関数という.

## 特性関数 (4/4)

### 定理 4.2

次の右辺の期待値が存在すれば等式が成り立つ。

$$\left. \frac{\partial^{n_1 + \dots + n_p}}{\partial t_1^{n_1} \dots \partial t_p^{n_p}} \varphi_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) \right|_{\mathbf{t}=\mathbf{0}} = i^{(n_1 + \dots + n_p)} \mathbf{E}(X_1^{n_1} \dots X_p^{n_p}).$$

## 分布と特性関数 (1/2)

### 定理 4.3 (反転公式)

確率変数  $X$  の分布関数, 特性関数をそれぞれ,  $F_X, \varphi_X$  とする. このとき,  $F_X$  の連続点  $a, b$  ( $a < b$ ) において

$$F_X(b) - F_X(a) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} \varphi_X(t) dt$$

が成り立つ.

### 定理 4.4 (一意性定理)

確率変数  $X_1, X_2$  の確率分布をそれぞれ  $\mu_1, \mu_2$  とする. また, それらの特性関数をそれぞれ  $\varphi_1, \varphi_2$  とする. このとき

$$\varphi_1 = \varphi_2 \Leftrightarrow \mu_1 = \mu_2$$

が成り立つ.



## 特性関数と分布 (2/2)

### 例 4.4 (再生性)

$X_1 + X_2$  の特性関数を求めることにより, 次の結果が得られる.

- (1)  $X_1 \sim B(m, p)$ ,  $X_2 \sim B(n, p)$ ,  $X_1$  と  $X_2$  は互いに独立  
 $\Rightarrow X_1 + X_2 \sim B(m + n, p)$ .
- (2)  $X_1 \sim p(\lambda_1)$ ,  $X_2 \sim p(\lambda_2)$ ,  $X_1$  と  $X_2$  は互いに独立  
 $\Rightarrow X_1 + X_2 \sim p(\lambda_1 + \lambda_2)$ .
- (3)  $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ ,  $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ ,  $X_1$  と  $X_2$  は互いに独立  
 $\Rightarrow X_1 + X_2 \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$ .

### 注 4.2

$X_1, X_2$  が独立で, それぞれの分布が, ある分布族に含まれるとき,  $X_1 + X_2$  の分布も同じ分布族に含まれるならば, その分布族は再生性を持つという.