確率・統計 B
確率変数と分布の収束 (1)

若木宏文

wakaki@math.sci.hiroshima-u.ac.jp

2014.10.8

table of contents

確率収束 (1/6)

ベルヌーイ試行

条件 (1), (2), (3) をみたす n 回の繰り返し試行を,
成功率 p, 反復回数 n のベルヌーイ試行 とよぶ.

(1) 各回の試行の結果は, A か A^c のどちらか一方しか起きない.

(2) 各回の試行の結果は, 他の試行の結果と互いに独立である.

(3) 事象 A が起こる確率 $(= p)$ は毎回不変である.

成功率 p, 反復回数 n のベルヌーイ試行において,
事象 A が起こった回数を X とすると

$$X \sim B(n, p) \quad (\text{ 定理 } 2.8\ )$$

確率収束 (2/6)

例 5.1

サイコロを何度も振るとき 1 の目のでる比率は $1/6$ に近づく.
ベルヌーイ試行において,

$$X_n = \begin{cases} 1 & n \text{ 回目の試行で事象 } A \text{ が起こった} \\ 0 & n \text{ 回目の試行で事象 } A \text{ が起こらなかった} \end{cases}$$

とし,

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j \quad (A \text{ が起こる相対頻度})$$

とすると, $\bar{X}_n$ は $n \to \infty$ のとき, $p = \mathrm{P}(A)$ に近づく.

確率収束 (3/6)

- $\bar{X}_n$ が p に近づくことの, 定義は？
  $\Rightarrow$ 確率収束, 概収束
- 近づくことの理論的な裏づけは？
  $\Rightarrow$ 大数の法則
- 例えば, $n = 100, d = 0.1$ に対して, $\mathsf{P}(|\bar{X}_n - p| \leq d)$ の値はどれ位？
  $\Rightarrow$ 分布収束, 中心極限定理

確率収束 (4/6)

定義 5.1 (確率収束 (convergence in probability))

$\{X_n\}$: 確率変数列, θ : 定数, X : 確率変数

$$^{\forall}\varepsilon > 0 \quad \lim_{n\to\infty} \mathsf{P}(|X_n - \theta| > \varepsilon) = 0$$

が成り立つとき, $\{X_n\}$ は θ に確率収束するといい,

$$X_n \xrightarrow{p} \theta \quad (n \to \infty)$$

とかく.

$$^{\forall}\varepsilon > 0 \quad \lim_{n\to\infty} \mathsf{P}(|X_n - X| > \varepsilon) = 0$$

が成り立つとき, $\{X_n\}$ は X に 確率収束するといい,

$$X_n \xrightarrow{p} X \quad (n \to \infty)$$

とかく.

確率収束 (5/6)

定理 5.1 (大数の法則 (弱法則))

$\{X_n\}$: 互いに独立な確率変数列,
$\mathsf{E}(X_n) = \mu, \mathsf{Var}(X_n) = \sigma^2 \ (n = 1, 2, \ldots)$
$\Rightarrow$

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j \xrightarrow{p} \mu \quad (n \to \infty)$$

(証明は板書で)

例 5.1 の場合, $\mathsf{E}(X_n) = p$, $\mathsf{Var}(X_n) = p(1-p)$ だから

$$\bar{X}_n \xrightarrow{p} p \quad (n \to \infty)$$

確率収束 (6/6)

復習 (平均, 分散の性質, 不等式)

(1) $\mathsf{E}(aX + bY) = a\mathsf{E}(X) + b\mathsf{E}(Y)$.

(2) $X \leq Y \Rightarrow \mathsf{E}(X) \leq \mathsf{E}(Y)$.

(3) $\mathsf{Var}(aX) = a^2\mathsf{Var}(X)$.

(4) X と Y が独立 $\Rightarrow \mathsf{Var}(X + Y) = \mathsf{Var}(X) + \mathsf{Var}(Y)$

(5) (チェビシェフの不等式) $\mathsf{E}(X) = \mu$, $\mathsf{Var}(X) = \sigma^2 < \infty$ ならば

$$\mathsf{P}(|X - \mu| \geq k) \leq \sigma^2/k^2.$$

概収束 (1/7)

補題 1

$(\Omega, \mathcal{B}, \mathsf{P})$: 確率空間
$\{X_n\}$: $(\Omega, \mathcal{B}, \mathsf{P})$ 上の確率変数列,
X : $(\Omega, \mathcal{B}, \mathsf{P})$ 上の確率変数

$$\Rightarrow \quad \{\omega \in \Omega;\ \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\} \in \mathcal{B}$$

(証明は板書で)

概収束 (2/7)

定義 5.3 (概収束 (almost surely convergence))

$\{X_n\}$: 確率変数列，　X : 確率変数
$\mathrm{P}(\lim_{n\to\infty} X_n = X) = 1$, すなわち

$$^{\exists}E \subset \Omega \text{ s.t. } \mathrm{P}(E) = 0, \ ^{\forall}\omega \in \Omega_0 = \Omega - E \ \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)$$

が成り立つとき $\{X_n\}$ は X に概収束, または確率 1 で収束するといい,

$$X_n \overset{a.s.}{\to} X \quad (n \to \infty)$$

とかく.

概収束 (3/7)

定理 (概収束と同値な条件 (定理 5.7, 注 5.10))

$$A_n(\varepsilon) = \{\omega \in \Omega\ ;\ \ |X_n(\omega) - X(\omega)| \le \varepsilon\}$$
$$B_n(\varepsilon) = \{\omega \in \Omega\ ;\ \ |X_n(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon\}$$

と定義すると次は同値

(i) $X_n \overset{a.s.}{\to} X \quad (n \to \infty)$

(ii) $\forall \varepsilon\ \mathrm{P}(\underline{\lim}_{n\to\infty} A_n(\varepsilon)) = 1$

(iii) $\forall \varepsilon\ \mathrm{P}(\overline{\lim}_{n\to\infty} B_n(\varepsilon)) = 0$

概収束 (4/7)

証明

$$\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)$$

$$\Leftrightarrow \quad {}^\forall\varepsilon > 0\ {}^\exists m \textit{ s.t. } {}^\forall n\ (n \geq m),\ |X_n(\omega) - X(\omega)| \leq \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \quad {}^\forall\varepsilon > 0\ \omega \in \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} A_n(\varepsilon) = \underline{\lim}_{n\to\infty} A_n(\varepsilon)$$

$$\Leftrightarrow \quad \omega \in \bigcap_{k=1}^{\infty} \left\{ \underline{\lim}_{n\to\infty} A_n(\tfrac{1}{k}) \right\} \quad \left(\because \varepsilon > 1/k \Rightarrow A_n(\varepsilon) \supset A_n(1/k) \right)$$

概収束 (5/7)

(i) $\Rightarrow$ (ii)

$^\exists\Omega_0 \subset \Omega$ *s.t.* $\mathrm{P}(\Omega_0) = 1$, $\omega \in \Omega_0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)$

$$\Omega_0 \subset \bigcap_{k=1}^{\infty} \left\{ \varliminf_{n\to\infty} A_n(\tfrac{1}{k}) \right\} \subset \varliminf_{n\to\infty} A_n(\tfrac{1}{k}) \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

$^\forall k \ 1 = \mathrm{P}(\Omega_0) \le \mathrm{P}(\varliminf_{n\to\infty} A_n(1/k))$

$^\forall\varepsilon > 0 \ ^\exists k$ s.t. $\varepsilon > 1/k$

$\Rightarrow \quad \mathrm{P}(\varliminf_{n\to\infty} A_n(\varepsilon)) \ge \mathrm{P}(\varliminf_{n\to\infty} A_n(1/k)) = 1$

概収束 (6/7)

(ii) $\Rightarrow$ (i)

$A_{(k)} = \underline{\lim}_{n\to\infty} A_n(1/k)$ とおくと $^{\forall}k$ $\mathsf{P}(A_{(k)}) = 1$

$A_{(k)} \supset A_{(k+1)}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ であるから

$$\mathsf{P}\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_{(k)}\right) = \lim_{k\to\infty} \mathsf{P}(A_{(k)}) = 1$$

$$\Omega_0 = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_{(k)} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \left\{ \underline{\lim}_{n\to\infty} A_n(\tfrac{1}{k}) \right\}$$ とおくと

$$\omega \in \Omega_0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)$$

概収束 (7/7)

定理 5.8

$$X_n \xrightarrow{a.s.} X \ (n \to \infty) \quad \Rightarrow \quad X_n \xrightarrow{p} X \ (n \to \infty)$$

(証明は板書で)

定理 5.9 (大数の強法則)

$\{X_n\}$: 独立に <u>同一分布</u> に従う確率変数列,
 $\mathrm{E}(X_n) = \mu$ (有限値)
$\Rightarrow$

$$\bar{X}_n \xrightarrow{a.s.} \mu \quad (n \to \infty)$$

(参考: 「確率論」西尾真喜子, 第 6 章)